В.И. ОСЕЛЕДЕЦ[1], Д.В. ХМЕЛЁВ[2]

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕОДНОРОДНЫЕ СЧЕТНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Статья опубликована в журнале “Проблемы передачи информации”, 2000, том 36, вып.1, с.60-76

Изучаются счетные системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ в $X \subset l_1$ с ограниченным оператором Якоби $J(x) = \partial f/\partial x$. Получены достаточные признаки глобальной устойчивости и глобальной асимптотической устойчивости, когда при любом $x \in X$ матрица $J^{\text{т}}(x)$ является матрицей интенсивностей переходов некоторой счетной цепи Маркова и X — подмножество линейного аффинного многообразия.

Результаты применены к двум бесконечным системам, возникшим из современной теории массового обслуживания.

Ключевые слова и фразы. Нелинейные динамические системы, глобальная асимптотическая устойчивость, марковские процессы, сходимость, теория массового обслуживания.

§1. Введение

Последние исследования сетей обслуживания со сложной дисциплиной маршрутизации в [1–3], транспортных сетей [4, 5], а также асимптотического поведения сетей Джексона [6] столкнулись с задачей доказательства глобальной сходимости решений некоторых бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений к стационарному решению. Разрозненные результаты этих работ, тем не менее, допускают общий подход к своему обоснованию. Такой подход и будет здесь изложен. Мы проиллюстрируем наши новые результаты на системе [1], даже усилив [1, 3], и на системе, к которой не применимы методы [1, 2, 5].

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер гранта 99-01-00314)

[2]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ISSEP (Grant s98.2042).

§2. Основные определения и результаты

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество действительных чисел, $\mathbb{N} = \{1, \ldots\}$, через l_1 — пространство последовательностей $x = (x_0, x_1, \ldots)^{\text{т}}$ с нормой $\|x\| = |x_0| + |x_1| + \ldots$ Мы полагаем x бесконечным столбцом в связи с удобством применений в приложениях (см. примеры в конце статьи). Норма $\|\cdot\|$ индуцирует норму, а следовательно, и топологию на ограниченных линейных операторах A: $l_1 \to l_1$, $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\|Ax\|/\|x\|$. Окрестность точки $g \in l_1$ обозначим через $U_\varepsilon(g) = \{x \in l_1 \mid \|g - x\| < \varepsilon\}$. Все векторные и матричные неравенства следует понимать как покомпонентные.

Пусть $x(t, g)$ — единственное решение системы уравнений

$$\dot{x} = f(x), \ \ x \in l_1, \ \ f : l_1 \to l_1 \tag{1}$$

с начальным условием $x(t_0, g) = g \in l_1$, $t_0 \geq 0$. Более того, пусть $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо зависит от начального условия, а производная $\Phi(t, g) = \partial x(t, g)/\partial g$ решения по начальному условию непрерывна по g и удовлетворяет *системе уравнений в вариациях*:

$$\dot{x} = f(x), \ \ \dot{\Phi} = J(x)\Phi, \ \ x(t_0, g) = g \in l_1, \ \ \Phi(t_0, g) = I : l_1 \to l_1, \tag{2}$$

где $J(x) = (\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1}^{\infty}$ — матрица оператора Якоби, а I — тождественный оператор.

Теорема 1 (локальная теорема существования)**.** *Пусть функция $f(x)$ и ее производная $J(x)$ при $x \in U_\eta(g)$ непрерывны и удовлетворяют условиям $\|f(x)\| < M_0$, $\|J(x)\| < M_1$. Тогда существует такое число $\delta > 0$, $\delta = \min(\eta/M_0, 1/M_1)$, что для всякого t в интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ дифференциальное уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее условиям $x(t_0, g) = g$ и $x(t, g) \in U_\eta(g)$. При этом $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо по начальному условию и его производная удовлетворяет уравнению* (2).

В дальнейшем мы будем рассматривать задачи (2) с таким множеством X начальных условий, что решение $x(t, g) \in X$ определено при любом $t \geq t_0 = 0$, $g \in X$. Следствие 1 позволяет проверять такое свойство у конкретных систем.

Далее у нас возникнет требование на неотрицательность недиагональных элементов матрицы $J(g)$. Связь этого условия с поведением $x(t, g)$ раскрывается в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $x(t, g) \in l_1$ при любом $t \geq 0$ и $g \in l_1$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *для всех g недиагональные элементы $J(g)$ неотрицательны;*

(ii) *для всех g для любого $h \in l_1$, $h \geq 0$ $x(t, g+h) \geq x(t, g)$.*

Последняя теорема допускает переформулировку для решений $x(t, \cdot)$, остающихся в некотором "толстом" множестве $X \subset l_1$. Однако технические условия, которые в этом случае надо наложить на X, затемнили бы существо дела, в то время как максимальной общности нам так и не удалось бы достичь.

Часто система (1) получается формальным переходом к пределу в последовательности систем

$$\dot{x}^{(n)} = f^{(n)}(x^{(n)}), \;\; x^{(n)} \in l_1, \;\; f^{(n)} : l_1 \to l_1. \tag{3}$$

с начальным условием $x^{(n)}(0,\, g^{(n)}) = g^{(n)} \in l_1$. Следующая оценка дает достаточные условия верности такого перехода.

Теорема 3. *Пусть для всех $s \leq t^*$ $\|f(x^{(n)}(s, g^{(n)})) - f^{(n)}(x^{(n)}(s, g^{(n)}))\| < C(n, t^*)$ и $\|f(x^{(n)}(s, g^{(n)})) - f(x(s, g))\| \leq K\|x^{(n)}(s, g^{(n)}) - x(s, g)\|$. Тогда*

$$\|x^{(n)}(t, g^{(n)}) - x(t, g)\| \leq [C(n, t^*) + \|g^{(n)} - g\|]e^{Kt} - C(n, t^*)$$

при $0 \leq t \leq t^*$.

Сразу получаем

Следствие 1. *Если при фиксированном t^* в условиях теоремы 3 $\|g^{(n)} - g\| \to 0$ и $C(n, t^*) \to 0$, то $\|x^{(n)}(t, g^{(n)}) - x(t, g)\| \to 0$ равномерно на любом подмножестве отрезка $[0, t^*]$.*

Линейное отображение $A\colon l_1 \to l_1$ назовем *марковским*, если $Ah \geq 0$ при любом $h \geq 0$ и $(1, \ldots, 1, \ldots)A = (1, \ldots, 1, \ldots)$. Заметим, что отображение A — марковское, если его транспонированная бесконечная матрица является стохастической.

Обозначим $L = \{g \in l_1 \mid g_0 + \ldots = 0\}$. Во всех последующих результатах мы предполагаем, что существует такое выпуклое множество $X \subset c + L$, $c \in l_1$, что $x(t, g) \in X$ при всех $g \in X$ при любом $t \geq 0$ и $\exp(tJ(g))$ — марковское отображение. Выполнение этого условия можно обосновать с помощью следствия 1 (см. примеры в конце статьи).

Теорема 4. *Для любых g^0, $g^1 \in X$ при всех $t \geq 0$: $\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leq \|g^1 - g^0\|$*

Из этой теоремы мы получаем следующий достаточный признак ограниченности по норме решений $x(t, g)$.

Следствие 2. *Пусть $\exists g^* \in X\colon x(t, g^*) = g^*$. Тогда $\|x(t, g) - g^*\| \leq \|g - g^*\|$ при $t \geq 0$, $g \in X$.*

Чтобы доказать сходимость всякого решения к стационарному, необходимо проверять дополнительные условия. Для марковского отображения A определим *коэффициент эргодичности A по направлению $g \neq 0$* посредством формулы $\mathbf{k}(A,g) = \|g\| - \|Ag\|$. Для $a \geq 0$ и марковского A положим $\mathbf{k}(aA,g) = a\mathbf{k}(A,g)$.

По определению положим $\alpha = \sup_{i \geq 0} \sup_{g \in X}(-J_{ii}(g))$. Предположим, что существует такая пропорциональная марковской бесконечная матрица $B \geq 0$, что

(а) для всех $g \in X$ $J(g) + (\alpha + \zeta)I \geq B$, где I является единичной матрицей, а $\zeta \geq 0$ — некоторая константа;

(б) для $t > 0$ коэффициент эргодичности $\exp(tB)$ по любому фиксированному направлению $g \in L \setminus \{0\}$ строго больше нуля: $\mathbf{k}(\exp(tB),\, g) > 0$.

Теорема 5. *Если выпуклое $X \subset c + L$, где $c \in l_1$, и выполнены условия* (а) *и* (б)*, то для любого $\tau > 0$ и для любых g^0, $g^1 \in X$, $g^1 - g^0 \neq 0$: $\|x(\tau, g^1) - x(\tau, g^0)\| < \|g^1 - g^0\|$.*

Теперь, наконец, можно сформулировать желаемый признак сходимости.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и*

а) *существует единственная точка $g^* \in X$, являющаяся стационарным решением* (1)*: $x(t, g^*) = g^*$, $f(g^*) = 0$;*
б) *при любом фиксированном $g \in X$ множество $\{x(t,g) \mid t \geq 0\}$ предкомпактно в l_1.*

Тогда для любого $g \in X$ имеем $\|x(t,g) - g^*\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Как будет видно из примеров, удобно проверять условия теоремы 6 для некоторого подмножества X, а затем использовать следующее утверждение.

Теорема 7 (об укорачивании змеи)**.** *Пусть*

а) *существует такое стационарное решение $g^* \in X$, что $\exists \varepsilon > 0$ для любого $g \in U_{2\varepsilon}(g^*) \cap X$: $\|x(t,g) - g^*\| \to 0$;*

б) *для любых g^0, $g^1 \in X$ при любом $t \geq 0$: $\|x(t,g^1) - x(t,g^0)\| \leq \|g^1 - g^0\|$.*

Тогда для любого $g \in X$: $\|x(t,g) - g^*\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Для того, чтобы проверять предкомпактность траекторий в п. б) теоремы 6, можно пользоваться следующей теоремой. На примерах, приведенных в конце статьи, мы поясним тонкости, связанные с применением теорем 5–8.

Теорема 8. *Если*

(i) *существует такая однородная эргодичная положительно возвратная цепь Маркова со счетным числом состояний $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и* *непрерывным временем, с матрицей интенсивностей переходов* $Q = (q_{ij})$, *что* $\sum\limits_{l\geq k} J_{lj}(x(t,g)) \leq \sum\limits_{l\geq k} q_{ml}$ *при любых* $j \leq m$, $k \in \{0,\dots,j\} \cup \{m+1,\dots\}$, $t \geq 0$, $g \in X$;

(ii) *существует стационарная точка* $g^* = x(t,g^*) \in X$,

то для любого $g \in X$ *траектория решения* $\{x(t,g) \mid t \geq 0\}$ *предкомпактна.*

§3. Вспомогательные обозначения и утверждения

1. **Компактность и сжатие.** Напомним, что множество называется компактным, если из любого покрытия его открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие. Подмножество l_1, замыкание которого компактно в l_1, назовем *предкомпактным.* Из анализа известно, что множество является предкомпактным тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.

Обозначим через $x_{\geq k}$ вектор $(0, \dots, 0, x_k, x_{k+1}, \dots)$, у которого все координаты, начиная с k-й совпадают с соответствующими координатами вектора x, а предыдущие координаты равны 0.

Предложение 1 (критерий предкомпактности)**.** *Множество* $X \subset l_1$ *является предкомпактным тогда и только тогда, когда* X *ограничено и* $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \|x_{\geq k}\| < \varepsilon$.

Предложение 2. *Пусть отображение* $f\colon X \to X$ *компактного метрического пространства* (X,ρ) *в себя уменьшает расстояния, т.е. для любых* x, $y \in X$, $x \neq y$, $\rho(fx,fy) < \rho(x,y)$. *Тогда отображение* f *имеет единственную неподвижную точку* $x^* = f(x^*)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f^n x, x^*) = 0$ *при любом* $x \in X$.

Предложение 2 следует из следующего предложения, в котором сформулирован известный *обобщенный принцип неподвижной точки* [7, с.274, теорема 34.5].

Предложение 3. *Пусть отображение* $f\colon X \to X$ *полного метрического пространства* (X,ρ) *обладает свойством: для любых* x, $y \in X$ $\rho(fx,fy) \leq q(\alpha,\beta)\rho(x,y)$, $(\alpha \leq \rho(x,y) \leq \beta)$, *причем при* $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ *выполнено* $q(\alpha,\beta) < 1$. *Тогда отображение* f *имеет единственную неподвижную точку* y^* *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f^n x, y^*) = 0$ *при любом* $\forall x \in X$.

Приведем короткое доказательство предложения 2.

Доказательство предложения 2. Выбросим в декартовом произведении $X \times X$ все пары точек, расстояние между которыми строго меньше ε. Для любой пары (x,y), принадлежащей оставшемуся множеству R, можно корректно определить коэффициент сжатия

$k(x, y) = \rho(fx, fy)/\rho(x, y) < 1$. Поскольку R компактно, существует такое $k_0 < 1$, что $\forall (x, y) \in R$: $k(x, y) \le k_0$.

Следовательно, $\forall x, y \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(x, y, \varepsilon) > 0$: $\forall n > N(x, y, \varepsilon)$ $\rho(f^n x, f^n y) < \varepsilon$, то есть, $\rho(f^n x, f^n y) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $x \in X$. Рассмотрим последовательность $x, fx, f^2x, \ldots$. Поскольку X компактно, она имеет предельную точку z, т.е. $\exists k_1 < k_2 < \ldots$: $f^{k_i} x \to z$. Покажем, что точка z переводится отображением f в себя.

Последовательность $f^{k_i+1}x = f(f^{k_i})x \to fz$. Отсюда $\rho(z, fz) \leftarrow \rho(f^{k_i}x, f(f^{k_i}x))$. Но ранее доказано, что $\rho(f^{k_i}x, f^{k_i}fx) \to 0$, в частности, для точек x и $y = fx$. Отсюда получаем $z = fz$, т.е. неподвижность точки z. Единственность очевидна, а сходимость уже доказана. $\square$

2. **Свойства коэффициента эргодичности по направлению.** Пусть отображение $A = aP$, где $a > 0$ и P — марковское отображение, $P : l_1 \to l_1$. Определим *коэффициент эргодичности* $\mathbf{k}(A, g)$ *отображения* A*:* $l_1 \to l_1$ *по направлению* $g \in l_1 \setminus \{0\}$ по правилу $\mathbf{k}(A, g) = \|A\|\|g\| - \|Ag\|$. Здесь

$$\|A\| = \sup_{x \in l_1, \|x\|=1} \|Ax\| = \sup_i \|Ae_i\|,$$

где e_k — вектор, каждая координата которого, кроме k-й равной 1, равна 0. Очевидно, $\mathbf{k}(A, g) = a\mathbf{k}(P, g)$. Если $a = 1$, то отображение A — марковское, а следовательно, $\|A\| = 1$, и определение коэффициента эргодичности совпадает с данным в §1.

Линейное отображение A *неотрицательно* (*положительно*), если при всех $h \ge 0$, $h \ne 0$: $Ah \ge 0$ ($Ah > 0$). Если $A - B$ неотрицательно, мы пишем $A \ge B$, (если $A - B$ положительно, $A > B$). Из определений следует, что бесконечные матрицы отображений просто сравниваются покомпонентно.

В дальнейшем нам потребуются следующие две леммы относительно неотрицательных бесконечных матриц, задающих ограниченные линейные операторы.

Лемма 1. *Пусть* $A \ge B \ge 0$ *и* $C \ge D \ge 0$*. Тогда* $AC \ge BD \ge 0$*.*

Для доказательства достаточно сложить неравенства $(A - B)C \ge 0$ и $B(C - D) \ge 0$. По индукции из этой леммы получаем, что если $A_1 \ge B \ge 0, \ldots, A_n \ge B \ge 0$, то $A_n \ldots A_1 \ge B^n$.

Лемма 2. *Пусть* $g \in L \setminus \{0\}$*,* $A = aC$*,* $B = bD$*, где* $a > 0$ *и* $b > 0$*, а* C *и* D *— марковские отображения. Если* $A > B \ge 0$*, то* $\mathbf{k}(A, g) > \mathbf{k}(B, g)$*. Если* $A \ge B \ge 0$*, то* $\mathbf{k}(A, g) \ge \mathbf{k}(B, g)$*.*

Доказательство. Очевидно, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$. Ввиду неравенства треугольника $\|Ag\| \leq \|(A-B)g\| + \|Bg\|$. Если $A - B > 0$, то $\|(A-B)g\| < \|A-B\|\|g\|$, ввиду того, что $g \in L \setminus \{0\}$. Поскольку $\|(A-B)e_i\| = a-b$, то $\|A-B\| = \|A\|-\|B\|$. Следовательно, $\|Ag\| < \|A\|\|g\| - \|B\|\|g\| + \|Bg\|$ или $\|B\|\|g\| - \|Bg\| < \|A\|\|g\| - \|Ag\|$, что и требовалось. Случай $A \geq B$ рассматривается аналогично. □

§4. Доказательства основных утверждений

Доказательство теоремы 1. Утверждение следует из [8, теорема 3.4.4], где необходимо положить неограниченный оператор $A = 0$. Суть [8, теорема 3.4.4] состоит в доказательстве того, что отображение Пикара является сжимающим. □

Лемма 3. *Рассмотрим такое выпуклое множество X, что $x(t,g) \in X$ при любом $g \in X$, а производная $\Phi(t,g)$ отображения $x(t,g)$ задается системой уравнений (2). Тогда для любых g^0, $g^1 \in X$ справедлива следующая формула:*

$$x(t,g^1) - x(t,g^0) = \int_0^1 \Phi(t,\gamma(s))(g^1 - g^0)ds, \tag{4}$$

где $\gamma(s) = (1-s)g^0 + sg^1$, $0 \leq s \leq 1$.

Доказательство. Отображение $x(t,\cdot)$ переводит отрезок $\gamma(s)$ в кривую $x(t,\gamma(s))$. В силу непрерывной дифференцируемости $x(t,g)$ справедлива формула

$$x(t,\gamma(\tau))) = x(t,g^0) + \int_0^\tau \frac{\partial x(t,\gamma(s))}{\partial s} ds.$$

По формуле сложной производной

$$\frac{\partial x(t,\gamma(s))}{\partial s} = \frac{\partial x(t,\cdot)}{\partial g}(\gamma(s))\gamma'(s).$$

Вспоминая, что $\partial x(t,\cdot)/\partial g = \Phi(t,\cdot)$ и $\gamma'(s) = g^1 - g^0$, при $\tau = 1$ получаем (4). □

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнено (i). Тогда, ввиду (4),

$$x(t,g+h) - x(t,g) = \int_0^1 \Phi(t,\gamma(s))h ds,$$

где $\gamma(s) = g + sh$, $0 \leq s \leq 1$. В силу неотрицательности $J(g)$ вне диагонали, из (2) получаем $\Phi(t,\gamma(s)) \geq 0$, а следовательно, $\Phi(t,\gamma(s))h \geq 0$, откуда и получаем (ii).

Пусть теперь выполнено (ii). Решение $x(t,g) = g + y(t,g)$, где $y(t,g)$ является неподвижной точкой *отображения Пикара* $(\Pi\theta)(t) =$

$\int_{t_0}^{t} f(g+\theta(\tau))d\tau$ при $t \in [t_0-\delta_1,\ t_0+\delta_1]$, $\delta_1 < \delta$ (см. условие теоремы 1). Отображение Π является сжимающим с коэффициентом $\lambda = \delta_1 M_1 < 1$. Рассмотрим приближение к решению $\tilde{x}(t,g) = g+\tilde{y}(t,g) = g+(t-t_0)f(g)$. Из теоремы о сжимающих отображениях следует, что

$$\|\tilde{x}(t,g)-x(t,g)\| = \|\tilde{y}(t,g)-y(t,g)\| \le \frac{1}{1-\lambda}\|\Pi\tilde{y}(t,g)-\tilde{y}(t,g)\|.$$

Вычисляем

$$\begin{aligned}\Pi\tilde{y}(t,g)-\tilde{y}(t,g) &= \int_{t_0}^{t} f(g+(\tau-t_0)f(g))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(g)d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t}\big(f(g+(\tau-t_0)f(g)) - f(g)\big)d\tau = D.\end{aligned}$$

Поскольку производная f ограничена, сама функция f — липшицева с константой M_1, откуда следует, что $\|f(g+(\tau-t_0)f(g)) - f(g)\| \le M_1\|(\tau-t_0)f(g)\| \le M_0M_1|\tau-t_0|$, а следовательно, $\|D\| \le M_0M_1(t-t_0)^2/2$ или

$$\|\tilde{x}(t,g)-x(t,g)\| \le M_0M_1(t-t_0)^2/2(1-\lambda).$$

В силу этой оценки для всех достаточно малых $\zeta > 0$

$$0 \le x(t,g+\zeta e_j) - x(t,g) = \zeta e_j + (t-t_0)[f(g+\zeta e_j)-f(g)] + \gamma(g,t),$$

где $\|\gamma(g,t)\| \le M_0M_1(t-t_0)^2/(1-\lambda)$. Компонента $i \ne j$ последнего неравенства имеет вид

$$0 \le (t-t_0)[f_i(g+\zeta e_j) - f_i(g)] + \gamma_i(g,t)$$

Разделив на $t-t_0>0$ и устремив $t \to t_0$ справа, ввиду $\gamma_i(g,t)/(t-t_0) \to 0$ получим

$$0 \le f_i(g+\zeta e_j) - f_i(g).$$

Поделим последнее выражение на ζ и устремим $\zeta \to 0$. Получим

$$0 \le \lim_{\zeta\to 0+}\frac{f_i(g+\zeta e_j)-f_i(g)}{\zeta} = \frac{\partial f_i}{\partial g_j} = J_{ij}(g),$$

что и означает выполнение (i). □

Доказательство теоремы 3. Преобразовывая дифференциальные уравнения в интегральные, получаем

$$x(t,g) = g+\int_0^t f(x(s,g))ds, x^{(n)}(t,g^{(n)}) = g^{(n)}+\int_0^t f^{(n)}(x^{(n)}(s,g^{(n)}))ds.$$

Отсюда с учетом выполнения условия Липшица на f при $t < t^*$

$$\|x^{(n)}(t, g^{(n)}) - x(t, g)\| \leq \|g^{(n)} - g\| + \int_0^t \|f^{(n)}(x^{(n)}(s, g^{(n)})) - f(x(s, g))\| ds \leq$$

$$\leq \|g^{(n)} - g\| + \int_0^t \|f^{(n)}(x^{(n)}(s, g^{(n)})) - f(x^{(n)}(s, g^{(n)}))\| ds +$$

$$+ \int_0^t \|f(x^{(n)}(s, g^{(n)})) - f(x(s, g))\| ds \leq$$

$$\leq \|g^{(n)} - g\| + C(n, t^*)t + K \int_0^t \|x^{(n)}(s, g^{(n)}) - x(s, g)\| ds.$$

Вводя обозначение $\varphi(t) = \|x^{(n)}(t, g^{(n)}) - x(t, g)\| \geq 0$, получаем интегральное неравенство

$$\varphi(t) \leq \|g^{(n)} - g\| + C(n, t^*)t + K \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Например, из [9, с. 154–155] известно, что $\varphi(t) \leq \psi(t)$, где

$$\psi(t) = \|g^{(n)} - g\| + C(n, t^*)t + K \int_0^t \psi(s) ds,$$

откуда $\psi(t) = (\|g^{(n)} - g\| + C(n, t^*))e^{Kt} - C(n, t^*)$. □

Доказательство теоремы 4. Ввиду (4)

$$\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leq \int_0^1 \|\Phi(t, \gamma(s))(g^1 - g^0)\| ds, \tag{5}$$

Поскольку для любых $t \geq 0$, $s \in [0,\, 1]$ отображение $\Phi(t, \gamma(s))$ марковское, $\|\Phi(t, \gamma(s))(g^1 - g^0)\| \leq \|g^1 - g^0\|$. Оценивая с помощью этого неравенства интеграл, получаем требуемое. □

Доказательство теоремы 5. Введем

$$\Psi(\tau) = \Phi \exp((\alpha + \zeta)\tau)$$

и

$$A = J\big(x(\tau, g)\big) + (\alpha + \zeta)I.$$

Из неравенства $A(\tau) \geq B$ и уравнения $\Psi'(\tau) = A(\tau)\Psi(\tau)$, $\Psi(0) = I$ с помощью леммы 1 можно получить следующую оценку:

$$\Psi(\tau) \geq \exp(\tau B).$$

Принимая во внимание лемму 2 и условие (б), для любого $g \in L \backslash \{0\}$ получаем

$$\mathbf{k}(\Psi(\tau), g) \geq \mathbf{k}(\exp(\tau B), g) > 0.$$

Поскольку

$$\mathbf{k}(\Phi, g) = \mathbf{k}(\Psi, g) \exp\big(-(\alpha + \zeta)\tau\big),$$

обнаруживаем, что $\mathbf{k}(\Phi, g) > 0$, или $\|\Phi\|\|g\| - \|\Phi g\| > 0$. Поскольку $\|\Phi\| = 1$, находим, что $\|\Phi g\| < \|g\|$. Для завершения доказательства надо использовать это неравенство в (5), помня, что $g^1 - g^0 \in L \setminus \{0\}$. $\square$

Доказательство теоремы 6. Зафиксируем некоторое $g \in X$. Из условия б) теоремы 6 следует, что замыкание траектории $\omega = \overline{\{x(t,g) \mid t \geq 0\}}$ — компактное множество. Из определения вытекает, что множество ω инвариантно относительно отображения $x(t, \cdot) : \omega \to \omega$ при любом $t \geq 0$. Введем семейство последовательностей $t_n^k = n/2^k$ при n, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В силу теоремы 5 и предложения 2 для всех $h \in \omega$ $x(t_n^k, h) \to g^{k*}$ при $n \to \infty$. Поскольку $x(t_n^k, h)$ — подпоследовательность последовательности $x(t_n^{k+1}, h)$, предел $g^{(k+1)*} = g^{k*} = g^{0*}$. Отметим, что g^{0*}, вообще говоря, зависит от g.

Мы показали, что для возрастающей последовательности двоично-рациональных чисел τ_l с равномерно ограниченными знаменателями $u(\tau_l, g) \to g^{0*}$. Докажем то же самое для *произвольной* последовательности $\tau_l \to \infty$. Для этого, как известно из анализа, достаточно показать $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T = T(g, \varepsilon)$: $\forall t > T$ $\|x(t,g) - g^{0*}\| < \varepsilon$.

При фиксированном g существует $\tau = \tau(g, \varepsilon) > 0$: $\forall t \in [0, \tau] \|x(t,g) - g\| < \varepsilon/2$. Выберем такое $k = k(g, \varepsilon)$, чтобы выполнялось неравенство $\tau > 1/2^k$. Определим $s(t) = [2^k t]/2^k$, где $[y]$ — наибольшее целое число, не превосходящее y. Поскольку $x(t_n^k, g) \to g^{0*}$, существует такое N, что при любом $n > N$ $\|x(t_n^k, g) - g^{0*}\| < \varepsilon/2$.

При $t > T = t_N^k$ можно записать следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
\|x(t,g) - g^{0*}\| &= \|x(t,g) - x(s(t),g) + x(s(t),g) - g^{0*}\| \leq \\
&\leq \|x(t,g) - x(s(t),g)\| + \|x(s(t),g) - g^{0*}\| \leq \\
&\leq \|x(t - s(t),g) - g\| + \|x(s(t),g) - g^{0*}\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

что и требовалось.

В частности, $g^{0*} = x(t, g^{0*})$ при любом t, откуда $f(g^{0*}) = 0$. Из п. а) теоремы 6 вытекает совпадение $g^{0*} = g^*$. $\square$

Доказательство теоремы 7. Предположим справедливость условия

A. Всякая такая точка g, что $\|g - g^*\| \geq 2\varepsilon$ за некоторое конечное время $T(g)$ приближается к g^* на $\varepsilon/2$: $\|x(T(g),g) - g^*\| \leq \|g - g^*\| - \varepsilon/2$.

Определим по индукции $T^k(g) = T(x(T^{k-1}(g),\, g))$, $T^1(g) = T(g)$. Поскольку **A** справедливо, то существует такое конечное m, что $\|x(T^m(g), g) - g^*\| < 2\varepsilon$. Пользуясь условием а) теоремы 7, получаем, что $\|x(\tau + T^m(g), g) - g^*\| \to 0$ при $\tau \to \infty$, что и требовалось.

Для доказательства **A** введем $h = \varepsilon(g-g^*)/\|g-g^*\|$. Существует такое конечное $T = T(g)$, что $\|x(T,g^*+h) - g^*\| < \|h\|/2 = \varepsilon/2$. Ввиду п. б) теоремы 7 для такого T

$$\|x(T,g) - g^*\| \le \|x(T,g) - x(T,g^*+h)\| + \|x(T,g^*+h) - g^*\| \le$$
$$\le \|g - (g^*+h)\| + \|h\|/2 = \|(g-g^*)\left(1 - \frac{\varepsilon}{\|g-g^*\|}\right)\| + \varepsilon/2 =$$
$$= \|g-g^*\| - \varepsilon/2. \quad \square$$

Достаточное условие предкомпактности. Напомним понятие *сравнимости* марковских процессов из [10]. Всякий вектор $g \in e_0 + L$, $g \ge 0$ можно рассматривать как распределение дискретной случайной величины, принимающей значение $i \ge 0$ с вероятностью g_i.

Рассмотрим *переходные функции* $P^1(\tau,t)$ и $P^2(\tau,t)$ двух марковских цепей с непрерывным временем и множеством состояний $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Элемент $P^1_{ij}(\tau,t)$ $(P^2_{ij}(\tau,t))$ равняется вероятности того, что в момент t цепь находится в состоянии j при условии, что в момент τ она находилась в состоянии i.

Введем отношение порядка $\prec$ на неотрицательных векторах из $e_0 + L$: $g^1 \prec g^2$, если $\sum_{l\ge j} g^1_l \le \sum_{l \ge j} g^2_l$ при всех $j \ge 0$. Переходные функции P^1 и P^2 сравнимы и $P^1(\tau,t) \prec P^2(\tau,t)$, если для любых вероятностных $g^1 \prec g^2$ для любых $t \ge \tau$ выполнено $(g^1)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}} P^1(\tau,t) \prec (g^2)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}} P^2(\tau,t)$. В [10] показано, что $P^1(\tau,t) \prec P^2(\tau,t)$ тогда и только тогда, когда $e_i^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}} P^1(\tau,t) \prec e_j^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}} P^2(\tau,t)$ при любых $t \ge \tau$ и $i \le j$.

Будем считать, что P^1 и P^2 удовлетворяют уравнениям Колмогорова

$$\dot P^1 = P^1 Q^1(t),\ \dot P^2 = P^2 Q^2(t)$$

с неоднородными матрицами интенсивностей перехода $Q^1(t) = (q^1_{ij}(t))$ и $Q^2(t) = (q^2_{ij}(t))$.

Теорема 9. *Пусть* $(Q^1)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(s)$ *и* $(Q^2)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(s)$ *— ограниченные линейные операторы, непрерывные по* s *в норме* l_1 *при любых* $s \ge 0$. *В этом случае* $P^1(\tau,t) \prec P^2(\tau,t)$ *при любых* $t \ge \tau \ge 0$ *тогда и только тогда, когда* $\sum_{l\ge k} q^{(1)}_{jl}(s) \le \sum_{l \ge k} q^{(2)}_{ml}(s)$ *при любых* $j \le m$, $k \in \{0,\dots,j\} \cup \{m+1,\dots\}$ *и* $s \in [\tau,t]$.

Доказательство. В случае постоянных переходных интенсивностей ($Q^1(s) \equiv Q^1$ и $Q^2(s) \equiv Q^2$) теорема 9 доказана в [10].

В общем случае необходимость можно показать подобно [10]. Достаточность мы получим предельным переходом.

Из того, что $P^1(\tau,s) \prec P^2(\tau,s)$ и $P^1(s,t) \prec P^2(s,t)$, следует $P^1(\tau,t) \prec P^2(\tau,t)$. Поэтому достаточность можно доказывать для какой-нибудь малой разности $t-\tau$. В силу непрерывности и ограниченности $Q^i(t)$ при небольшой разности $t-\tau$ решение $P^i(\tau,t)$ получается последовательными приближениями Пикара. Этим мы и воспользуемся в дальнейшем.

Положим $h=(t-\tau)/n$ а $t_i=\tau+ih$. Через $[x]$ обозначим наибольшее целое число $y\le x$. Положим

$$P_n^i(\tau,t)=\exp\left(hQ^i(t_0)\right)\ldots\exp\left(hQ^i(t_{n-1})\right),\ i=1,2.$$

Из случая постоянных интенсивностей и транзитивности отношения $\prec$ следует, что $P_n^1(\tau,t)\prec P_n^2(\tau,t)$.

Остается доказать, что $P_n^i(\tau,t)\to P^i(\tau,t)$. Положим $l(s)=[(s-\tau)/h]$. Определим

$$P_n^i(\tau,s)=D_h^i(s)\exp\big((s-t_{l(s)})Q^i(t_{l(s)})\big),$$
$$D_h^i(s)=\exp\big(hQ^i(t_0)\big)\ldots\exp\big(hQ^i(t_{l(s)-1})\big).$$

Справедлива оценка на близость $P_n^i(\tau,t)$ и $P^i(\tau,t)$, аналогичная оценке, использованной в теореме 2:

$$\|(P_n^i(\tau,t)-P^i(\tau,t))^{\mathrm{T}}\|\le\frac{1}{1-\lambda}\|(\Pi P_n^i(\tau,t)-P_n^i(\tau,t))^{\mathrm{T}}\|.$$

Вычислив

$$\Pi P_n^i(\tau,t)=\int_\tau^t D_h^i(s)\exp\big((s-t_{l(s)})Q^i(t_{l(s)})\big)Q^i(s)ds,$$

переписав $P_n^i(\tau,t)$ в виде

$$P_n^i(\tau,t)=\int_\tau^t D_h^i(s)\exp\big((s-t_{l(s)})Q^i(t_{l(s)})\big)Q^i(t_{l(s)})ds$$

и используя стохастичность экспонент матриц интенсивности, получаем

$$\|(P_n^i(\tau,t)-P^i(\tau,t))^{\mathrm{T}}\|\le\int_\tau^t\|(Q^i(s)-Q^i(t_{l(s)}))^{\mathrm{T}}\|ds\to 0$$

при $n\to\infty$ в силу равномерной непрерывности функции $Q^i(s)$ на отрезке $[\tau,t]$. □

Доказательство теоремы 8. Хорошо известно (см., например, [11]), что цепь Маркова из условия (i) обладает единственным собственным инвариантным распределением, которое мы обозначим через $\pi\in l_1$. Вектор π можно найти из уравнения $\pi^{\mathrm{T}}Q=0$. Обозначим через $|x|$ покомпонентный модуль $x \in l_1$. В силу условия (ii) теоремы 8 и (4)

$$|x(t,g)| \leq |g^*| + \int_0^1 \Phi(t,\gamma(s))|g-g^*|ds. \tag{6}$$

Обозначим через $P(t)$ решение уравнения $\dot{P} = PQ$, $P(0) = I$. Из условия доказываемой теоремы и теоремы 9 следует, что $\Phi(t,\gamma(s))^{\text{т}} \prec P(t)$ при любом $s \in [0,1]$. Для $x \in l_1$ определим суммы "хвостов" $S_k(x) = |x_k| + |x_{k+1}| + \ldots$. Кроме того, обозначим $h = |g-g^*|/\|g-g^*\|$: очевидно, h — вероятностный вектор. Из (6), условия (i) 8 и теоремы 9 следует, что

$$\begin{aligned} S_k(x(t,g)) &\leq S_k(g^*) + \|g-g^*\| S_k\left(\int_0^1 \Phi(t,\gamma(s))h\,ds\right) \leq \\ &\leq S_k(g^*) + \|g-g^*\| S_k(P(t)^{\text{т}}h) \leq \\ &\leq S_k(g^*) + \|g-g^*\|(S_k(|P(t)^{\text{т}}h-\pi|) + S_k(\pi)) \leq \\ &\leq S_k(g^*) + \|g-g^*\|(\|P(t)^{\text{т}}h-\pi\| + S_k(\pi)). \end{aligned}$$

Поскольку g^*, $\pi \in l_1$, $\exists k_1$, k_2: $S_{k_1}(g^*) < \varepsilon/3$ и $S_{k_2}(\pi) < \varepsilon/3\|g-g^*\|$. В силу [11, теорема 6.38], $\exists T$ $\forall t \geq T$: $\|P(t)^{\text{т}}h - \pi\| < \varepsilon/3\|g-g^*\|$. Положив $k = \max(k_1,k_2)$, получаем при $t \geq T$ $S_k(x(t,g)) \leq \varepsilon$ при любом $g \in X$. Применяя критерий предкомпактности (предложение 1), получаем предкомпактность множества $\{x(t,g) \mid t \geq T\}$. Множество $\{x(t,g) \mid 0 \leq t \leq T\}$ компактно, поскольку является непрерывным образом отрезка $[0,T]$. $\square$

§5. Примеры

1. **Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей.** Рассмотрим *уравнения среднего поля* из [1]

$$\begin{aligned} &\dot{V} = u_1 - \lambda, \\ &\dot{u}_1 = \lambda - (1+\lambda u_1)u_1 + u_2, \\ &\dot{u}_2 = \lambda u_1^2 - (1+\lambda u_2)u_2 + u_3, \\ &\ldots \\ &\dot{u}_k = \lambda u_{k-1}^2 - (1+\lambda u_k)u_k + u_{k+1}, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим через $u(t,\ g)$ единственное решение последней системы с начальным условием $u(0,\ g) = g \in l_1$. Будем сокращенно $\dot{u} = f(u)$ обозначать уравнение (7). Для обоснования локального существования и единственности решения $u(t,\ g)$ воспользуемся теоремой 1. Действительно, в ограниченном шаре $\|u\| \leq C$,

$\|f(u)\| \le 3(1+\lambda C)\|u\| \le 3(1+\lambda C)C$. Матрица Якоби (7) имеет следующий вид:

$$J(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\beta_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\lambda u_1 & -\beta_2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\lambda u_2 & -\beta_3 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda u_3 & -\beta_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda u_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

где $\beta_i = 1 + 2\lambda u_i$. Из вида $J(u)$ следует, что $\|J(u)\| \le 2(1+\lambda C)$ при $\|u\| < C$. Все условия теоремы 1 выполнены, а следовательно, решение $u(t,g)$ существует в некоторой окрестности $t_0 = 0$.

Лемма 4. *Множество*

$$U = \{(V, u_1, u_2, \dots) \mid 1 \ge u_1 \ge u_2 \ge \dots \ge 0,\ V + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = 0\} \qquad (9)$$

является инвариантым множеством системы (7).

Доказательство. Введем конечномерную аппроксимацию (7) при $n > 17$:

$$\begin{aligned} &\dot V = u_1 - \lambda + \lambda u_n^2, \\ &\dot u_1 = \lambda - (1+\lambda u_1)u_1 + u_2, \\ &\dot u_2 = \lambda u_1^2 - (1+\lambda u_2)u_2 + u_3, \\ &\dots \\ &\dot u_{n-1} = \lambda u_{n-2}^2 - (1+\lambda u_{n-1})u_{n-1} + u_n, \\ &\dot u_n = \lambda(u_{n-1}^2 - u_n^2) - u_n, \\ &\dot u_{n+1} = 0, \\ &\dot u_{n+2} = 0, \\ &\dots \end{aligned} \qquad (10)$$

которую кратко обозначим $\dot u^{(n)} = f^{(n)}(u^{(n)})$, и множества

$$U^{(n)} = \{(V, u_1, u_2, \dots, u_n, 0, 0, \dots) \mid 1 \ge u_1 \ge \dots \ge u_n \ge 0,\ V + \sum_{k=1}^{n} u_k = 0\}. \qquad (11)$$

Начальному условию $g \in U$ задачи (7) сопоставим начальное условие $g^{(n)} = (-(g_1 + \ldots + g_n), g_1, g_2, \dots, g_n, 0, 0, \dots) \in U^{(n)}$. Решение (10) с начальным условием $g^{(n)}$ обозначим через $u^{(n)}(t, g^{(n)})$. Легко показать ([1, лемма 1] или [5, раздел 5]), что при любом $t \ge 0$ решение $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \in U^{(n)}$.

В силу теоремы 3 $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \to u(t, g)$. Действительно, отображение f удовлетворяет условию Липшица. Из (7) и (10) вытекает $f(u^{(n)}(t, g^{(n)})) - f^{(n)}(u^{(n)}(t, g^{(n)})) = -\lambda({u_n}^{(n)})^2 e_0 + \lambda({u_n}^{(n)})^2 e_{n+1}$. Из (10) получаем $\dot{u}_n{}^{(n)} \le \lambda$, откуда ${u_n}^{(n)}(t) \le g_n + \lambda t$. Поэтому $\|f(u^{(n)}(s, g^{(n)})) - f^{(n)}(u^{(n)}(s, g^{(n)}))\| \le 2\lambda\big(g_n + \lambda t\big)^2 \le 2\lambda\big(g_n + \lambda t^*\big)^2$ при $s \le t^*$. Следовательно, условия теоремы 3 выполнены.

Предположим теперь, что при $g \in U$ и при некотором $t > 0$ $u(t, g) \notin U$. Поскольку $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \to u(t, g)$, получаем $\exists n$: $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \notin U^{(n)}$, что, как уже говорилось, в силу [1, лемма 1] неверно. $\square$

При $0 \le \lambda < 1$ легко найти стационарное решение $u(t, g^*) = g^*$ при $t \ge 0$ и доказать его единственность в U. При $\lambda \ge 1$ стационарного решения нет.

Теорема 10. *Если* $0 < \lambda < 1$, *то для любого* $g \in U$: $\|u(t, g) - g^*\| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Заметим, что в [1] доказана лишь покоординатная сходимость, поэтому наша теорема сильнее теоремы из [1].

Доказательство. Докажем выполнение условий теоремы 6 для множества $X_C = \{g \in U \mid \|g - g^*\| < C\}$, $C > 0$. Условие а) теоремы 6 выполняется автоматически. Проверим выполнение условия б) теоремы 6, т.е. докажем предкомпактность любой траектории $u(t, g)$ при $g \in X_C$.

Матрица $J(u)$ имеет отрицательные элементы только на диагонали, множество $X_C \subset L$, а точка $g^* \in X_C$. Следовательно, выполнены условия следствия 2 и

$$\|u(t, g)\| \le \|u(t, g) - g^*\| + \|g^*\| \le \|g - g^*\| + \|g^*\| \le C + \|g^*\| \le C + \|g^*\|.$$

Для $g \in X_C$ из $\sum\limits_{k \ge 1} g_k \le C + \|g^*\|$ и неувеличения неотрицательных g_k получаем оценку $g_k \le (C + \|g^*\|)/k$, справедливую при $k \ge 1$.

Зафиксируем такое $k^* > 17$, что

$$2\lambda \frac{C + \|g^*\|}{k^*} < 1 \text{ и } \frac{C + \|g^*\|}{k^*} < 1.$$

Положим $\zeta = 2\lambda \dfrac{C + \|g^*\|}{k^*}$. Введем цепь Маркова с пространством состояний $\mathbb{N} \cup \{0\}$ со следующими переходными интенсивностями:

интенсивность перехода $0 \to 1$ равна $1 + 2\lambda$,

при $0 < k \le k^*$ интенсивность перехода $k \to k - 1$ равна 1, а интенсивность перехода $k \to k + 1$ — 2λ,

при $k^* < k$ интенсивность перехода $k \to k - 1$ равна 1, а интенсивность перехода $k \to k + 1$ равна $\zeta < 1$.

Цепь эргодична в силу критерия Фостера. Для наглядности выпишем транспонированную матрицу переходных интенсивностей

$$Q^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta & -\beta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\lambda & -\beta & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\beta & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\lambda & -\gamma & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \zeta & -\gamma & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \zeta & -\gamma & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\beta = 1 + 2\lambda$, $\gamma = 1 + \zeta$. Условия теоремы 8 выполнены, а значит, траектория $\{u(t,g) \mid t \geq 0\}$ предкомпактна.

Остается проверить выполнение условий теоремы 5. Введем матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $J(u) + (2 + 2\lambda I) \geq B$. Из формулы $\exp(tB) = I + tB + t^2B/2! + \dots$ следует, что при $t > 0$ все элементы верхней строки матрицы B строго больше нуля. Предположим, что для какого-то $g \in L\backslash\{0\}$: $\|\big(\exp(tB)\big)g\| = \|\exp(tB)\|\|g\|$. В силу положительности первой строки $\exp(tB)$ получаем $\|\big(\exp(tB)\big)g\| < \|\big(\exp(tB)\big)|g|\|$ и приходим к противоречию, ибо $\||g|\| = \|g\|$. Следовательно, $0 < \|\exp(tB)\|\|g\| - \|\big(\exp(tB)\big)g\| = \mathbf{k}(\exp(tB), g)$.

Условия теоремы 6 выполнены, и из нее следует, что $u(t,g) \to g^*$ при любом $g \in X_C$. Остается воспользоваться теоремой 7 при $X = U$ и $2\varepsilon < C$. $\square$

2. **Транспортная сеть.** Пусть $r > 0$. Рассмотрим *уравнения среднего поля* для симметричной транспортной сети, которая получается при $m \to \infty$ из системы, рассмотренной в [5]

$$\begin{aligned}
&\dot V = \lambda u_1 - V,\\
&\dot u_1 = \lambda(u_2 - u_1) + V(1 - u_1),\\
&\dot u_2 = \lambda(u_3 - u_2) + V(u_1 - u_2),\\
&\dot u_3 = \lambda(u_4 - u_3) + V(u_2 - u_3),\\
&\dots\\
&\dot u_k = \lambda(u_{k+1} - u_k) - V(u_{k-1} - u_k).\\
&\dots
\end{aligned} \tag{12}$$

Обозначим через $u(t,\, g)$ единственное решение последней системы с начальным условием $u(0,\, g) = g \in l_1$. Уравнение (12) сокращенно будем обозначать $\dot u = f(u)$. Для обоснования существования и единственности локального решения $u(t,\, g)$ воспользуемся теоремой 1. Действительно, в ограниченном шаре $\|u\| \le C$, $\|f(u)\| \le 3(\lambda + C)(1 + \|u\|) \le 3(\lambda + C)(1 + C)$. Матрица Якоби (12) имеет следующий вид:

$$J(u) = \begin{pmatrix}
-1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots\\
1 - u_1 & -\beta & \lambda & 0 & 0 & \dots\\
u_1 - u_2 & V & -\beta & \lambda & 0 & \dots\\
u_2 - u_3 & 0 & V & -\beta & \lambda & \dots\\
u_3 - u_4 & 0 & 0 & V & -\beta & \dots\\
u_4 - u_5 & 0 & 0 & 0 & V & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\beta = \lambda + V$. Из вида $J(u)$ следует, что $\|J(u)\| \le \max\bigl(2(\lambda + \|u\|), 2(1 + \|u\|)\bigr)$ при $\|u\| < C$. Условия теоремы 1 выполнены, и для $g \in l_1$ в некоторой окрестности $t_0 = 0$ существует решение $u(t, g)$.

Лемма 5. *Множество*

$$U = \{(V, u_1, u_2, \dots) \mid 1 \ge u_1 \ge u_2 \ge \dots \ge 0,\ V \ge 0,\ V + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = r\} \tag{14}$$

является инвариантым множеством системы (12) *при* $r > 0$.

Доказательство. Введем конечномерную аппроксимацию (12) при $n > 17$:

$$\begin{aligned}
&\dot V = \lambda u_1 - V(1-u_n),\\
&\dot u_1 = \lambda(u_2-u_1) + V(1-u_1),\\
&\dot u_2 = \lambda(u_3-u_2) + V(u_1-u_2),\\
&\dot u_3 = \lambda(u_4-u_3) + V(u_2-u_3),\\
&\dots\\
&\dot u_{n-1} = \lambda(u_n-u_{n-1}) + V(u_{n-2}-u_{n-1}),\\
&\dot u_n = -\lambda u_n + V(u_{n-1}-u_n),\\
&\dot u_{n+1} = 0,\\
&\dot u_{n+2} = 0,\\
&\dots,
\end{aligned} \tag{15}$$

и множества

$$\begin{aligned}
U^{(n)} = \{&(V, u_1, u_2, \dots, u_n, 0, 0, \dots) \mid 1 \ge u_1 \ge \dots \ge u_n \ge 0, V \ge 0\\
&V + \textstyle\sum_{k=1}^n u_k = r\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Начальному условию $g \in U$ задачи (12) сопоставим начальное условие

$$g^{(n)} = \frac{\|g\|}{g_0 + \dots + g_n}(g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, 0, 0, \dots) \in U^{(n)}.$$

Решение (15) с начальным условием $g^{(n)}$ обозначим через $u^{(n)}(t, g^{(n)})$. Легко показать [5, раздел 4], что при любом $t \ge 0$ решение $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \in U^{(n)}$.

В силу теоремы 3 $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \to u(t, g)$. Действительно, отображение f удовлетворяет условию Липшица. Из (12) и (15) вытекает $f(u^{(n)}(t, g^{(n)})) - f^{(n)}(u^{(n)}(t, g^{(n)})) = -V^{(n)}{u_n}^{(n)}e_0 + V^{(n)}{u_n}^{(n)}e_{n+1}$. Поскольку $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \in U^{(n)}$, $V^{(n)} \le r$ и ${u_n}^{(n)} \le r/n$. Поэтому $\|f(u^{(n)}(s, g^{(n)})) - f^{(n)}(u^{(n)}(s, g^{(n)}))\| \le 2r^2/n$ при $s \le t^*$. Следовательно, условия теоремы 3 выполнены.

Предположим теперь, что при $g \in U$ и при некотором $t > 0$ $u(t, g) \notin U$. Поскольку $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \to u(t, g)$, получаем, что $\exists n$: $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \notin U$, что в силу [5, раздел 4] неверно. $\square$

При $\lambda > 0$ легко найти стационарное решение $u(t, g^*) = g^*$ при $t \ge 0$ и доказать его единственность в U. Действительно, приравнивая правые части (12) к нулю, получаем $f(g^*) = 0$, откуда $u_1^* = V/\lambda = \rho$, $u_k = \rho^k$. Принимая во внимание, что $V + u_1 + \dots = r$, получаем уравнение на ρ:

$$\frac{\rho}{1-\rho} = r - \lambda\rho,$$

которое имеет единственное решение ρ^* при $\rho > 0$. Таким образом, $g_0^* = \lambda\rho^*$, $g_k^* = (\rho^*)^k$.

Теорема 11. *При* $\lambda > 0$ *для любого* $g \in U$: $\|u(t,g) - g^*\| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство теоремы 11. Введем множество $X_\varepsilon = \{g \in U \mid \|g - g^*\| < \varepsilon\}$. В силу следствия 2 множество X_ε инвариантно относительно отображения $u(t,\cdot)$ при любом $t \geq 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялись строгие неравенства $\rho^* + \varepsilon/\lambda < 1$ и $\rho^* - \varepsilon > \varepsilon$. Введем семейство множеств $X_{\varepsilon,C} = \{g \in X_\varepsilon \mid g_k < C/k^2$ при $k > 0\}$. Докажем, что при достаточно больших C множество $X_{\varepsilon,C}$ инвариантно относительно системы (12). Существует такое $k^* > 17$, что при любом $k > k^*$ выполнено неравенство

$$\Big(\rho^* + \frac{\varepsilon}{\lambda}\Big)\frac{2k-1}{(k-1)^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2} < 0. \qquad (17)$$

Выберем $C > (k^*)^2$. Заметим, что при таких C для всякого $g \in X_{\varepsilon,C}$ для $k \leq k^*$ имеем $g_k \leq 1 < C/k^2$. Рассмотрим теперь координаты с номерами $k > k^*$. Докажем, что при $k > k^*$ координата k не может приблизиться к C/k^2. Действительно, предположим, что в момент t координата $u_k(t,g) = C/k^2$. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{u}_k \leq \lambda\left(\frac{C}{(k+1)^2} - \frac{C}{k^2}\right) + u_0\left(\frac{C}{(k-1)^2} - \frac{C}{k^2}\right) \leq \\ \leq \lambda C\left(\frac{k^2-(k+1)^2}{(k+1)^2k^2} + \left(\rho^* + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\frac{k^2-(k-1)^2}{(k-1)^2k^2}\right) < 0,\end{aligned}$$

поскольку $|u_0 - \lambda\rho^*| = |g_0 - g_0^*| < \varepsilon$, и выполнено (17). Напомним, что $|u_0(t,g) - g_0^*| \leq \|u(t,g) - g^*\| < \varepsilon$, поскольку $g \in X_\varepsilon$. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Положим

$$\alpha_k = \frac{C}{k^2} - \frac{C}{(k+1)^2}.$$

Введем цепь Маркова с пространством состояний $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и со следующими переходными интенсивностями:

интенсивность перехода $0 \to k$ при $k > 0$ равна α_k,

при $k > 0$ интенсивность перехода $k \to k-1$ равна λ, интенсивность перехода $k \to k+1$ равна $\lambda\rho^* + \varepsilon + \alpha_{k+1}$, а интенсивность перехода $k \to l$ при $l > k+1$ равна α_l.

Цепь эргодична в силу критерия Фостера и конечности суммы $\sum k\alpha_k$. Для наглядности выпишем транспонированную матрицу переходных интенсивностей

$$Q^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -\sum\alpha_i & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & -\zeta_1 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \xi+\alpha_2 & -\zeta_2 & \lambda & 0 & \dots \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \xi+\alpha_3 & -\zeta_3 & \lambda & \dots \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \xi+\alpha_4 & -\zeta_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\zeta_k = -(\lambda+\lambda\rho^*+\varepsilon+C/(k+1)^2)$, $\xi = \lambda\rho^*+\varepsilon$. Проверим выполнение условий теоремы 8 для $X_{C,\varepsilon}$. Неравенства п. а) теоремы 8 сводятся к неравенствам $-\lambda \le -\lambda$, $V \le \lambda\rho^*+\varepsilon$, $u_k \le C/k^2$. Разберем, например, случай $j=0$, $m=1$. Тогда неравенства надо проверять лишь при $k \ge m+1$. Заметим, что $\sum_{l\ge k} J_{lj} = \sum_{l\ge k}(u_l - u_{l+1}) = u_k$, а

$$\sum_{l\ge k} q_{ml} = \begin{cases} \xi + \sum_{l\ge k}\alpha_k = \xi + C/k^2 & \text{при } k = m+1 = 2, \\ \sum_{l\ge k}\alpha_k = C/k^2 & \text{при } k > m+1 = 2. \end{cases}$$

При $k = m+1 = 2$ получаем неравенство $u_k \le \xi+C/k^2$, вытекающее из неравенства $u_k \le C/k^2$. При $k > m+1 = 2$ получаем в точности неравенство $u_k \le C/k^2$. Условия теоремы 8 выполнены, а значит траектория $\{u(t,g) \mid t \ge 0\}$ предкомпактна.

Остается проверить выполнение условий теоремы 5. Введем матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Из неравенства, $\rho^*+\varepsilon/\lambda < 1$ следует, что $\varepsilon \le \lambda$. Отсюда заключаем $J(u)+(\lambda+r+1) \ge B$. Из формулы $\exp(tB) = I+tB+t^2B^2/2!+\dots$ следует, что при $t>0$ все элементы верхней строки матрицы B строго больше нуля. Предположим, что для какого-то $g \in L\setminus\{0\}$: $\|\big(\exp(tB)\big)g\| = \|\exp(tB)\|\|g\|$. В силу положительности первой строки $\exp(tB)$ получаем $\|\big(\exp(tB)\big)g\| < \|\big(\exp(tB)\big)|g|\|$ и приходим к противоречию, поскольку $\||g|\| = \|g\|$. Следовательно, $0 < \|\exp(tB)\|\|g\| - \|\big(\exp(tB)\big)g\| = \mathbf{k}(B,g)$.

Условия теоремы 6 выполнены и из нее следует, что при любом $g \in X_{\varepsilon,C}$: $u(t,g) \to g^*$.

Покажем теперь, что для любого $g \in X_{\varepsilon/2}$: $u(t,g) \to g^*$. Для этого необходимо показать, что при всех $\delta > 0$ $\exists T$ $\forall t \ge T$: $\|u(t,g) - g^*\| <$

δ. Для любого $g \in X_{\varepsilon/2}$ существует такое $l > k^*$, что для

$$\hat{g} = \frac{\|g\|}{g_0 + \ldots + g_{l-1}}(g_0, \ldots, g_{l-1}, 0, 0, \ldots)$$

расстояние $\|g - \hat{g}\| < \min(\delta/2, \varepsilon/2)$. Из $\|\hat{g}\| = r$ и финитности $\hat{g}$ получаем $\hat{g} \in X_{\varepsilon, l^2}$. Но в силу уже доказанной сходимости для этого $\hat{g} \in X_{\varepsilon, l^2}$ существует такое T, что при всех $t \geq T$: $\|u(t, \hat{g}) - g^*\| < \delta/2$. Пользуясь теоремой 4, заключаем, что при $t \geq T$: $\|u(t, g) - g^*\| \leq \|u(t, g) - u(t, \hat{g})\| + \|u(t, \hat{g}) - g^*\| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$.

Остается воспользоваться теоремой 7 при множестве $X = U$. $\square$

§6. Границы применения и возможные обобщения

1. **Работы по дисциплинам маршрутизации.** Все системы [2] можно исследовать на глобальную устойчивость аналогично разделу 1 §5 с тем, однако, усилением, что сходимость к стационарному решению будет не покоординатной, а по норме.

Чтобы пояснить, почему это так, вернемся к системе [1]. На самом деле, в [1] изучалась система

$$\begin{aligned} &\dot{u}_1 = \lambda - (1 + \lambda u_1)u_1 + u_2, \\ &\dot{u}_2 = \lambda u_1^2 - (1 + \lambda u_2)u_2 + u_3, \\ &\ldots \\ &\dot{u}_k = \lambda u_{k-1}^2 - (1 + \lambda u_k)u_k + u_{k+1} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{18}$$

в инвариантном множестве $U' = \{(u_1, u_2, \ldots,) \mid 1 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq 0\}$. В [1] доказано, что система (18) покоординатно монотонна в U'. Замеченное свойство монотонности существенно используется в доказательстве сходимости. В силу теоремы 2, это означает, что все недиагональные элементы матрицы Якоби (18) неотрицательны. Для того, чтобы система попала под действие наших теорем, мы вводим дополнительную переменную $V = -(u_1 + u_2 + \ldots)$: $\dot{V} = -\lambda + u_1$. Нам повезло: частная производная скорости V по всем u_j неотрицательна, а следовательно, матрица Якоби расширенной системы с переменной V также имеет отрицательные элементы только на диагонали. Только после этого начинают работать наши теоремы.

В доказательстве теорем о сходимости в [2] использовалась покоординатная монотонность решений. Вспоминая теорему 2, получаем неотрицательность недиагональных элементов матриц Якоби соответствующих бесконечных систем дифференциальных уравнений. Для создания искуственного интеграла мы введем переменную $V = -(u_1 + u_2 + \ldots)$. Во всех системах, рассмотренных в [2],

$\dot{V} = -\lambda + u_1$. Следовательно, матрица Якоби становится неотрицательной вне диагонали, что позволяет применять наши теоремы.

2. **Интерпретация неотрицательности элементов матрицы Якоби.** Мы видели, что самыми серьезными ограничениями наших методов являются неотрицательность матрицы Якоби вне диагонали и наличие первого интеграла равного сумме компонент. Было бы интересно понять "физический смысл" этих условий.

Здесь необходимо вспомнить, что система (18) описывает поведение длин очередей на приборах. Грубо говоря (более подробно, см. [1] или [2]), u_k — это доля приборов, в очереди на обслуживание к которым стоит не менее, чем k заявок (включая заявку, обслуживаемую в данный момент). Неотрицательность элементов матрицы Якоби свидетельствует о том, что интенсивность изменения u_k (т.е. производная u_k по времени) может лишь увеличиваться за счет u_j при $j \neq k$. Она может уменьшаться (или не уменьшаться) только за счет u_k. Таким образом, *при увеличении доли очередей с минимальным числом заявок j в системе интенсивность изменения доли очередей с минимальным числом заявок $k \neq j$ может лишь возрасти.*

Добавление дополнительной переменной $V = -(u_1 + u_2 + \ldots)$ для введения искусственного первого интеграла также имеет свою интерпретацию. Сумма $u_1 + u_2 + \ldots$ равна математическому ожиданию числа заявок в очереди. Назовем V *загрузкой* системы. Если частная производная $\dot{V}$ по u_k: $\partial\dot{V}/\partial u_k \geq 0$, то это означает, что интенсивность изменения загрузки может лишь увеличиваться при увеличении u_k. Т.е., *при увеличении числа заявок в очередях, система может лишь ускорить работу по их обслуживанию (или, если наблюдается неэргодичный случай, интенсивность увеличения загрузки возрастает).*

3. **Устойчивость бесконечной системы, описывающей большую симметричную замкнутую сеть Джексона ([6]).** Проверить ее устойчивость можно методом, описанным в разделе 2 §5 (заметим, кстати, что в доказательстве локальной устойчивости в [6] содержится ошибка, а глобальная устойчивость не доказана вообще). Только вначале необходимо перейти в пространство упорядоченных по невозрастанию последовательностей.

4. **Дальнейшие обобщения: периодические решения.** Если изучать системы с ω-периодичной правой частью $f(t,x) = f(t + \omega, x)$, то все наши результаты подвергаются простой модификации,

позволяющей доказывать устойчивость единственного периодического решения. Единственным неясным моментом останется проверка, что это периодическое решение существует и единственно. По вопросу существования и единственности периодического решения см. [7].

В заключение авторы благодарят Л.Г. Афанасьеву и Н.Д. Введенскую за внимание к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Введенская Н.Д., Добрушин Р.Л., Карпелевич Ф.И.* Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей — асимптотический подход//Пробл. передачи информ. 1996. Т. 32. №1. С.15–27.
2. *Vvedenskaya N.D., Suhov Yu.M.* Dobrushin's Mean-Field Approximation for a Queue with Dynamic Routing//Markov Processes and Related Fields. 1997. №3. P.493–526.
3. *Mitzenmacher M.* The Power of Two Choices in Randomized Load Balancing. PhD thesis, University of California at Berkley, September 1996.
4. *Afanassieva L.G., Fayolle G., Popov S. Yu.* Models for Transportation Networks//J. Math. Science. 1997. V.84. №3. P.1092–1103.
5. *Khmelev D.V., Oseledets V.I.* Mean-field approximation for stochastic transportation network and stability of dynamical system: Preprint №434 of University of Bremen. Bremen, June 1999.
6. *Scherbakov V.V.* Time scales hierarchy in large closed Jackson networks, preprint №4. Moscow: French-Russian A.M. Liapunov Institute of Moscow State University, 1997.
7. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Физматгиз, 1975.
8. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
9. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, Физматлит, 1970.
10. *Кирстайн Б.М., Франкен Д.Е., Штойян Д.* Сравнимость и монотонность марковских процессов, Теория вероятностей и ее применения. 1977. №1. С.43–54.
11. *Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.* Счетные цепи Маркова. М.: Наука, Физматлит, 1987.

Перевод заглавия на английский язык:
Global stability of infinite non-linear differential equations and non-homogeneous countable Markov chains