Нелинейное обобщение теоремы Перрона

А.Владимиров В.И.Оселедец А.Рыбко К.М.Ханин
Д.В.Хмелёв

26 июля 2002

Опубликовано в журнале “Доклады РАН”. т. 67, номер 2, 2003.

Аннотация

Сформулировано достаточное условие для глобальной асимптотической устойчивости отображения звездчатой поверхности в $\mathbb{R}^d_+$ в себя, основанное на нелинейном обобщении теоремы Перрона.

Рассмотрим вещественное векторное пространство $\mathbb{R}^d$, в котором задана норма $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_d|$. Известная теорема Перрона [1] (см., например, [2]) относится к матрице линейного оператора $A : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d_+$, переводящего положительный конус в себя.

Теорема 1. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) > 0$ поэлементно: $a_{ij} > 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant d$. Тогда существует единственный вектор $x^* \in \mathbb{R}^d_+$, $x^* > 0$, $\|x\| = x^*_1 + \ldots + x^*_d = 1$, который является собственным вектором матрицы A и соответствует максимальному собственному значению, совпадающему со спектральным радиусом $\rho(A)$ матрицы A: $Ax^* = \rho(A)x^*$.*

Помимо этого, при некоторых $K > 0$, $0 < \beta < 1$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ выполнено

$$\|A^n x/\|A^n x\| - x^*\| \leqslant K\beta^n \tag{1}$$

Существует классическое обобщение этой теоремы на тот случай, когда степень матрицы A в (1) заменяется на произведение произвольной последовательности матриц A_i из компактного множества $\mathcal{A}$ поэлементно положительных матриц. Для формулировки соответствующей теоремы следует определить *расстояние по направлению* $\rho(x, y)$ между ненулевыми точками x, $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ по следующему правилу:

$$\rho(x, y) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

Отметим, что расстояние по направлению зависит лишь от направления векторов x и y, а не от их длины, т.е. на самом деле оно является метрикой на проективном пространстве $\mathbb{R}P^n_+$. Для ненулевых x и z будем писать $x \sim z$, если $x = az$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Рассмотрим семейство $\mathcal{A}$ положительных операторов $A : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d_+$, удовлетворяющее условию*

$$0 < B \leqslant A \leqslant D < \infty \text{ для всех } A \in \mathcal{A}.$$

Тогда существуют такие константы $\zeta = \zeta(B, D)$, $0 < \zeta < 1$ и $N = N(B, D)$, что при $n > N$ для любой последовательности операторов $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ и для любой пары ненулевых векторов $x, y \geq 0$ выполнено неравенство

$$\rho(A_n \ldots A_1 x, A_n \ldots A_1 y) \leqslant \zeta \rho(x, y). \tag{2}$$

Теорема 2 носит "фолклёрный" характер. Это, в частности, означает, что мы не знаем точной ссылки на источник, в котором этот результат доказан. Поэтому, в конце статьи мы приводим полное доказательство теоремы 2.

В настоящей работе предлагается нелинейный вариант теоремы 1, естественно возникающий в контексте теории динамических систем. Именно, рассмотрим d-мерный конус $\mathbb{R}^d_+$ и зафиксируем функционал $\alpha : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}_+$, обладающий следующими свойствами:

A1) $\alpha(\lambda x) = \lambda \alpha(x)$ для всех $\lambda \geq 0$, $x \geq 0$

A2) $(\alpha'(x))^{\mathrm{T}} x > 0$ при всех $x \geq 0$, $x \neq 0$ (где знак $^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование, а $\alpha'(x) = (\partial\alpha/\partial x_1, \ldots, \partial\alpha/\partial x_d)^{\mathrm{T}}$ — производная или градиент α).

A3) $\alpha(x)$ является гладким функционалом с локально ограниченными третьими производными.

Очевидно, с помощью $\alpha(x)$ можно определить гладкую звездчатую поверхность

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d_+ \mid \alpha(x) = 1\}.$$

Рассмотрим преобразование $F : S \to \mathbb{R}^d_+$ и отвечающее ему отображение $T : S \to S$ задаваемое по следующему правилу:

$$Tx = \frac{F(x)}{\alpha(F(x))}.$$

Из условия A2) следует, что определённое таким образом преобразование есть композиция F и центральной проекции на поверхность S.

Нормаль к поверхности S в точке $x \in S$ задаётся производной (градиентом) $\alpha'(x)$. Обозначим

$$\gamma(x) = \alpha'(x)/((\alpha'(x))^{\mathrm{T}} x). \tag{3}$$

Заметим, что нормировка в формуле (3) выбрана так, что

$$\gamma(x)^{\mathrm{T}} x = 1.$$

Теорема 3. *Предположим, что*

$$A(x) = F'(x)(I - x\gamma(x)^{\mathrm{T}}) + F(x)\gamma(x)^{\mathrm{T}} \geq B > 0, \tag{4}$$

где I — единичный оператор. Тогда существуют такие константы $N = N(F, \alpha)$ и $\lambda = \lambda(F, \alpha)$, $0 < \lambda < 1$, что при любом $n > N$ неравенство

$$\rho(T^n x, T^n y) \leqslant \lambda \rho(x, y) \tag{5}$$

выполнено при всех $x, y \in S$. Отсюда, в частности, следует, что преобразование T имеет единственную неподвижную точку $x^* \in S$ и существуют такие $K > 0$, $0 < \beta < 1$, что

$$\|T^n x - x^*\| \leqslant K\beta^n \tag{6}$$

для любого $x \in S$.

Заметим, что теорема 3 является нелинейным обобщением теоремы 1. Действительно, в случае $F(x) = Ax$ и $\alpha(x) = x_1 + \ldots + x_d$ условие (4) выполнено с $B = A$, поскольку $F'(x) = A = A(x)$.

Замечание 1. *Отметим, что условие* (4) *зависит лишь от значений функции F на поверхности S. Действительно, $F'(x)$ действует в касательном пространстве в точке $x \in S$. Но матрица $(I - x\gamma(x)^{\mathrm{T}})$ является матрицей оператора проектирования на плоскость $\gamma(x)^{\mathrm{T}} y = 0$ вдоль вектора x (поскольку вектор x переводится в ноль).*

Замечание 2. *Условие $B > 0$ в* (4) *можно ослабить до неравенства $B \geq 0$ при условии* примитивности *матрицы B, то есть, при условии, что для некоторого $l > 0$ выполнено $B^l > 0$. Возможны и другие обобщения.*

Замечание 3. *Вместо фиксированных преобразования F и функционала α можно рассматривать последовательности F_1, F_2, ..., α_1, α_2, ..., равномерно удовлетворяющие указанным условиям. Тогда порождённая последовательность преобразований $T_i x = F_i(x)/\alpha_i(F_i(x))$ также будет сжатием за n шагов:*

$$\rho(T_{i+n} \ldots T_{i+1} x, T_{i+n} \ldots T_{i+1} y) \leqslant \lambda \rho(x, y).$$

Замечание 4. *Ранее в литературе уже предлагались нелинейные обобщения теоремы Перрона [3], которые нашли применение в математической экономике, математической демографии и теории разностных уравнений [4]. Однако, условия, которые налагаются на функцию F в работах [3, 4] носят глобальный характер и их связь с дифференциальным условием* (4) *не очевидна. Можно проверить, что при $d = 2$ условия* (4) *и [3] эквивалентны. В то же время, соотношение между условиями* (4) *и [3] в общей ситуации весьма нетривиально. Действительно, для проверки эквивалентности (или, скорее, неэквивалентности) условий в случае $d \geq 3$ необходимо сравнить две системы неравенств большой размерности.*

Замечание 5. *Если отображение F является однородным первой степени, а именно $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ при всех $\lambda \geq 0$, $x \geq 0$, то $F(x) = F'(x)x$ и условие* (4) *сводится к простому условию $F'(x) \geq B > 0$. В этом случае утверждение о сходимости к неподвижной точке (без оценки скорости сходимости) было доказано ранее* *(см. [5]). С учётом замечания 1 можно понимать условие* (4) *как утверждение о строгой поэлементной положительности производной однородного продолжения преобразования* F *с поверхности* S*. Отсюда, в принципе, следует утверждение о сходимости к неподвижной точке. Тем не менее, нам представляется, что предложенное доказательство имеет ряд несомненных преимуществ. Во-первых, оно даёт оценку скорости сходимости. Во-вторых, оно применимо в случае последовательности различных отображений. Но самое главное, это доказательство подчёркивает динамические причины устойчивости отображения* T.

Доказательство теоремы 3. Из условий теоремы следует, что существует константа C при которой выполнены следующие неравенства:

$$\|T'(x)\| \leqslant C \text{ для всех } x \in S \tag{7}$$

и

$$\frac{1}{C}\|x-y\| \leqslant \rho(x,y) \leqslant C\|y-x\| \text{ для всех } x,y \in S. \tag{8}$$

Поскольку S — гладкая и компактная поверхность, можно подобрать такую константу C, что наряду с неравенствами (7) и (8) выполнено неравенство

$$|\gamma(x)^{\text{т}}(x-y)| \leqslant C\|x-y\|^2 \text{ для всех } x,y \in S, \tag{9}$$

означающее геометрически, что нормаль к поверхности $\gamma(x)$ до второго порядка точности ортогональна вектору $x-y$, близкому к касательному пространству к поверхности S в точке x. Заметим, что

$$\begin{aligned} A(x)x &= (F'(x)(I - x\gamma(x)^{\text{т}}) + F(x)\gamma(x)^{\text{т}})x = \\ &= F'(x)(x - x\gamma(x)^{\text{т}}x) + F(x)\gamma(x)x = F(x) \end{aligned}$$

и поэтому

$$Tx \sim A(x)x = F(x),$$

где отношение эквивалентности $\sim$ определено выше. Рассмотрим траектории $x_i = T^i x_0$, $y_i = T^i y_0$, где $x_0 = x$ и $y_0 = y$. Тогда

$$\begin{aligned} x_i &\sim A(x_{i-1})\dots A(x_0)x_0, \\ y_i &\sim A(y_{i-1})\dots A(y_0)y_0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$A_i^j(x_j) = A(x_{j-1})\dots A(x_i),\ A_j^j = I.$$

Оценим разницу по направлению между векторами $A_0^n(x_0)y_0$ и $T^n y_0$:

$$\begin{aligned} \rho(T^n y_0, A_0^n(x_0)y_0) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho(A_i^n(x_i)T^i y_0, A_{i-1}^n(x_{i-1})T^{i-1}y_0) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \rho(A_i^n(x_i)TT^{i-1}y_0, A_i^n(x_i)A(x_{i-1})T^{i-1}y_0) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} K_1^{n-i}\rho(Ty_{i-1}, A(x_{i-1})y_{i-1}), \end{aligned}$$

где $K_1 = K_1(C)$. Поскольку $Ty_i \sim A(y_{i-1})y_{i-1}$, получаем

$$\begin{aligned}\rho(Ty_{i-1}, A(x_{i-1})y_{i-1}) = \rho(A(y_{i-1})y_{i-1}, A(x_{i-1})y_{i-1}) \leqslant \\ \leqslant C\|A(y_{i-1})y_{i-1} - A(x_{i-1})y_{i-1}\|.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&A(v)v - A(u)v = \\ &\quad = F(v) - (F'(u)(I - u\gamma(u)^{\text{т}}) + F(u)\gamma(u)^{\text{т}})((v-u)+u) = \\ &\quad = F(v) - F(u) - (F'(u) + (F(u) - F'(u)u)\gamma(u)^{\text{т}})(v-u) = \\ &\quad = F(v) - F(u) - F'(u)(v-u) - (F(u) - F'(u)u)\gamma(u)^{\text{т}}(v-u).\end{aligned}$$

Положив $u = x_{i-1}$, $v = y_{i-1}$ и используя гладкость F и оценку (9), получаем

$$\rho(Ty_{i-1}, A(x_{i-1})y_{i-1}) \leqslant C_1\|x_{i-1} - y_{i-1}\|^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\rho(T^n y_0, A_0^n y_0) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} K_1^{n-i} C_1 \|T^{i-1}x_0 - T^{i-1}y_0\|^2 \leqslant \\ &\leqslant C_1 \sum_{i=1}^{n} K_1^{n-i} C^{2i} \|x_0 - y_0\|^2 \leqslant C_2(n)\|x_0 - y_0\|^2 \leqslant \\ &\leqslant C_3(n)(\rho(x,y))^2.\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что

$$\rho(T^n x_0, T^n y_0) \leqslant \rho(T^n y_0, A_0^n(x_0)y_0) + \rho(A_0^n(x_0)y_0, T^n x_0).$$

Поскольку $T^n x_0 \sim A_0^n(x_0)x_0$, получаем используя теорему 2

$$\rho(A_0^n(x_0)y_0, T^n x_0) = \rho(A_0^n(x_0)y_0, A_0^n(x_0)x_0) \leqslant \zeta\rho(x_0, y_0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\rho(T^n x_0, T^n y_0) &\leqslant \zeta\rho(x_0, y_0) + C_3(n)\rho(x_0, y_0)^2 = \\ &= (\zeta + C_3(n)\rho(x_0, y_0))\rho(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Выберем такое $\varepsilon > 0$, что

$$\lambda = \zeta + C_3(n)\rho(x_0, y_0) < 1.$$

Тогда $\rho(T^n x_0, T^n y_0) < \lambda\rho(x_0, y_0)$ как только $\rho(x_0, y_0) < \varepsilon$. Из полученного локального сжатия и компактности поверхности S очевидно вытекает глобальное сжатие, что и доказывает (5).

Поскольку траектории любых двух точек под действием T^n экспоненциально сближаются, то отображение T имеет единственную неподвижную точку x^*, которая глобально устойчива. □

Из теоремы 3 вытекает следствие, которое находит применения в экономических и демографических задачах [4]. Именно, предположим, что $F(x)$ — отображение $\mathbb{R}^d_+$ в себя, выпуклое вверх:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x, y \in \mathbb{R}^d_+ \tag{10}$$

и покоординатно строго монотонное с положительной производной

$$F(x) \leqslant F(y) \text{ для всех } x \leqslant y, x, y \in \mathbb{R}^d_+ \text{ и } F'(x) > 0 \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^d_+, \tag{11}$$

и, кроме того, предположим, что $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям (A1)–(A3), а также $\alpha'(x) \geq 0$ (что также означает покоординатную монотонность).

Теорема 4. *Для любого выбора функционала α, удовлетворяющего условиям (A1)–(A3), для любого отображения F, удовлетворяющего условиям* (10) *и* (11)*, выполнено условие* (4) *теоремы 3.*

Доказательство. Положим $y = 0$ в условии (10):

$$F(\lambda x) \geq \lambda F(x). \tag{12}$$

Заметим, что в первом порядке

$$F(\lambda x) = F(x) + F'(x)(\lambda x - x) + O(\|\lambda x - x\|^2).$$

Подставляя это выражение в (12), получаем

$$F(x) + (\lambda - 1)F'(x)x + O((\lambda - 1)^2\|x\|^2) \geq \lambda F(x),$$

откуда

$$(1-\lambda)F(x) + O((1-\lambda)^2\|x\|^2) \geq (1-\lambda)F'(x)x.$$

Деление на $1 - \lambda$ приносит

$$F(x) + O((1-\lambda)\|x\|^2) \geq F'(x)x,$$

и устремляя $\lambda \to 1$ получаем

$$F(x) \geq F'(x)x.$$

Заметим теперь, что условие (4) можно переписать в виде

$$A(x) = F'(x) + (F(x) - F'(x)x)\gamma(x)^{\mathrm{т}} \geq B > 0.$$

Оно, очевидно, выполнено в силу доказанных неравенств, условия (11) и компактности поверхности S. □

В заключение мы приводим доказательство теоремы 2. По существу, теорема 2 естественно вытекает из результатов, приведённых Е.Сенетой [6, Section 3.2] в доказательстве сжимающего свойства для произведений неотрицательных матриц. Мы начнём со следующей леммы, восходящей к А.А. Маркову.

Лемма 1 (Марков, [7]). *Пусть* $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{d}$ *— стохастическая матрица,* $\sum_{j=1}^{d} p_{ij} = 1$*, а* $w \in \mathbb{R}^d$ *— некоторый* d*-мерный вектор (необязательно неотрицательный). Пусть* M_0 *и* m_0 *— максимальный и минимальный элементы* w*, а* M_1 *и* m_1 *— максимальный и минимальный элементы* Pw*, соответственно. Тогда* $M_1 \leqslant M_0$*,* $m_1 \geq m_0$ *и*

$$M_1 - m_1 \leqslant (1 - 2\varepsilon)(M_0 - m_0),$$

где $\varepsilon \geq 0$ *— минимальный элемент матрицы* P*.*

Обозначим через $a_{i,j}^{(m)}$ элемент матрицы A_m, стоящий в строке i и столбце j. Введём также обозначение

$$A^{(k,l)} = A_l \dots A_{k+1}, \ k < l$$

для произведения матриц. Элементы матрицы $A^{(k,l)}$ обозначим через $a_{i,j}^{(k,l)}$:

$$A^{(k,l)} = (a_{i,j}^{(k,l)})_{i,j=1}^{d}.$$

Следующую лемму мы приводим без доказательства, поскольку её утверждение легко вытекает из результатов, доказанных в [6, 8].

Лемма 2. *Существуют такие константы* $K_1 = K_1(B, D) > 0$*,* $K_2 = K_2(B, D) > 0$*,* $\lambda = \lambda(B, D) > 0$*, что следующие утверждения выполнены для произвольного произведения матриц, удовлетворяющих условию теоремы 2.*

1) $\dfrac{1}{K_1} \leqslant \dfrac{a_{s,i}^{(k,l)}}{a_{s,j}^{(k,l)}}, \dfrac{a_{i,s}^{(k,l)}}{a_{j,s}^{(k,l)}} \leqslant K_1$ *при всех* $1 \leqslant s, i, j \leqslant d$*.*

2) При всех $1 \leqslant s, r, i, j \leqslant d$ *выполнено*

$$\left| \frac{a_{s,i}^{(k,l)}}{a_{s,j}^{(k,l)}} - \frac{a_{r,i}^{(k,l)}}{a_{r,j}^{(k,l)}} \right| \leqslant K_2 \lambda^{k-l-1}$$

Лемма 3. *Имеет место разложение*

$$A^{(0,n)} = a_{1,1}^{(0,n)} (u^{(n)} (w^{(n)})^{\mathrm{T}} + \Omega^{(n)}),$$

где

$$\frac{1}{K_1} \leqslant u_i^{(n)}, w_i^{(n)} \leqslant K_1,$$

$$\Omega_{ij}^{(n)} \leqslant K_1 K_2 \lambda^n.$$

Доказательство. Берём

$$u^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0,n)} / a_{11}^{(0,n)} \\ \vdots \\ a_{d1}^{(0,n)} / a_{11}^{(0,n)} \end{pmatrix}, \ (w^{(n)})^{\mathrm{T}} = (a_{11}^{(0,n)} / a_{11}^{(0,n)}, \dots, a_{1d}^{(0,n)} / a_{11}^{(0,n)}),$$

то есть,

$$u_i^{(n)} = \frac{a_{i,1}^{(0,n)}}{a_{1,1}^{(0,n)}},\ w_i^{(n)} = \frac{a_{1,i}^{(0,n)}}{a_{1,1}^{(0,n)}}.$$

Тогда,

$$\Omega_{ij}^{(n)} = \left(\frac{1}{a_{1,1}^{(0,n)}} A^{(0,n)} - u^{(n)}(w^{(n)})^{\mathrm{т}}\right)_{ij} = \frac{a_{i,j}^{(0,n)}}{a_{1,1}^{(0,n)}} - \frac{a_{i,1}^{(0,n)}}{a_{1,1}^{(0,n)}}\frac{a_{1,j}^{(0,n)}}{a_{1,1}^{(0,n)}}.$$

В силу утверждений 1), 2) леммы 2 выполнено неравенство

$$|\Omega_{ij}^{(n)}| = \frac{a_{i,1}^{(0,n)}}{a_{1,1}^{(0,n)}} \cdot \left|\frac{a_{i,j}^{(0,n)}}{a_{i,1}^{(0,n)}} - \frac{a_{1,j}^{(0,n)}}{a_{1,1}^{(0,n)}}\right| \leqslant K_1 K_2 \lambda^{n-1}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности можно считать, что $\|x\| = \|y\| = 1$. Тогда $\rho(x,y) = \|x-y\|$. В силу леммы 3 имеет место разложение

$$A^{(0,n)} = a(\Omega + uw^{\mathrm{т}}),$$

где $1/K_1 \leqslant u_i, w_i \leqslant K_1$, $\|\Omega\| \leqslant K_3\lambda^n$.

$$\begin{aligned}\rho(A^{(0,n)}x, A^{(0,n)}y) &= \rho((\Omega + uw^{\mathrm{т}})\frac{x}{w^{\mathrm{т}}x}, (\Omega + uw^{\mathrm{т}})\frac{y}{w^{\mathrm{т}}y}) = \\ &= \rho(\Omega\frac{x}{w^{\mathrm{т}}x} + u, \Omega\frac{y}{w^{\mathrm{т}}y} + u) = \\ &= \|G(H(w(y))) - G(H(w(x)))\|,\end{aligned}$$

где $G(z) = z/\|z\|$, $H(x) = \Omega x + u$, $w(x) = x/w^{\mathrm{т}}x$. Формула Ньютона-Лейбница гласит

$$G(H(w(y))) - G(H(w(x))) = \int_0^1 G'(H(w(\gamma(s))))H'(w(\gamma(s)))w'(\gamma(s))\gamma'(s)ds,$$

где $\gamma(s) = (1-s)x + sy$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= y - x \text{ и } \|\gamma'(s)\| = \|y-x\|, \\ w'(\gamma(s)) &\leqslant \overline{w}(B,D), \\ H'(w(\gamma(s))) &= \Omega \text{ и } \|\Omega\| \leqslant K_3\lambda^n, \\ G'(H(w(\gamma(s)))) &= G'(Y(\gamma(x))) \text{ и } \|G'\| \leqslant \overline{G}(B,D),\end{aligned}$$

где вторая и четвёртая оценки на производные вытекают из того факта, что $\gamma(s) \in \Delta = \{x \geq 0 | x_1 + \ldots + x_d = 1\}$, того, что вектор w — равномерно отделён от нуля и от того, что отображение $x \mapsto H(w(x))$ на самом деле есть отображение $x \mapsto A^{(0,n)}x/(a_{1,1}^{(0,n)}w^{\mathrm{т}}x)$, которое в силу леммы 2 является равномерно положительным и ограниченным. Поэтому

$$\begin{aligned}\|G(H(w(y))) - G(H(w(x)))\| &\leqslant \overline{G}(B,D)\|\Omega\|\overline{w}(B,D)\|y-x\| \leqslant \\ &\leqslant K_4(B,D)\lambda^n\|y-x\| = K_4(B,D)\lambda^n\rho(x,y). \qquad \square\end{aligned}$$

Список литературы

[1] O. Perron. Zur Theorie der Matrizes. *Math. Ann. 64, 248-263*, (1907).

[2] R.A Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989. имеется русский перевод: Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* — М. “Мир”, 1989.

[3] Ulrich Krause. Perron’s stability theorem for nonlinear mappings. *J. Math. Econom.*, 15(3):275–282, 1986.

[4] Ulrich Krause. Concave Perron-Frobenius Theory and Applications. *Nonlinear analysis*, 47:1457–1466, 2001.

[5] Hukukane Nikaidô. *Convex structures and economic theory.* Mathematics in Science and Engineering, Vol. 51. Academic Press, New York, 1968.

[6] E. Seneta. *Non-negative matrices.* Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York, 1973. An introduction to theory and applications.

[7] А.А. Марков. Исследование одного важного случая зависимых испытаний. *Известия Импер. Акад. Наук С.П.б., серия 6*, (1):61–80, 1907.

[8] D. M. Hardcastle and K. Khanin. Continued fractions and the d-dimensional Gauss transformation. *Comm. Math. Phys.*, 215(3):487–515, 2001.