МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Хмелёв Дмитрий Викторович

ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ГЛОБАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

(Не вошедшие основной текст материалы)

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

МАТЕРИАЛЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В ОСНОВНОЙ ТЕКСТ
ДИССЕРТАЦИИ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
профессор, д.ф.-м.н.
Л.Г. Афанасьева

Москва 2001

Оглавление

Часть 1. Конечные модели

Рассмотрим просто конечную модель с приборами, которые перемещают пассажиров и тем самым обслуживают их. Что делается — заново доказываются некоторые теоремы из статьи [1]. Затем рассматривается простейшая система из двух узлов, у которой находится в явном виде инвариантная мера.

1. Модель с приборами, ожидающими пользователей

Эта работа посвящена конструктивной критике статьи [1]. Мы исследуем здесь модель, которая уже исследовалась в [1] и используем обозначения [1]. Напомним модель и обозначения.

Мы рассматриваем открытую транспортную сеть, состоящую из N станций (узлов) и V автомобилей, которые циркулируют между станциями. Множество всех узлов мы обозначаем через $\mathcal{S} = \{1, \ldots, N\}$. Мы предположим, что пассажир n приходит в момент t_n, $t_0 = 0$. Последовательность $a_n = t_n - t_{n-1}$ является метрически транзитивной. Для любого n: $\mathbf{E}a_n = \lambda^{-1}$. Пассажир n направляется в узел j с вероятностью $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1, N}$, $\sum_{j=1}^{N} \gamma_j = 1$. Все пассажиры выбирают узел назначения в соответствии с матрицей $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$. Мы обозначаем через значок ^{t}, который находится слева от своего аргумента, операцию транспонирования. Пусть вектор $\pi = {}^t(\pi_1, \ldots, \pi_N)$ задает инвариантную меру, отвечающую $\mathbf{P}$: ${}^t\pi\mathbf{P} = {}^t\pi$. Из теории марковских цепей известно, что π является единственной тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{P}$ *неразложима*. Автомобиль, прибывающий на станцию, где есть несколько ожидающих пассажиров, берет одного и отвозит к пункту назначения. Когда автомобиль прибывает на станцию без пассажиров, он останавливается и ждет пассажира. Пассажиры, которые приехали в узел назначения, покидают сеть. Если пассажир в момент прихода не обнаруживает на остановке автомобиля, то он ждет в очереди (мы предполагаем, что нетерпеливых пассажиров нет). Количество мест ожидания для клиентов неограничено. Заметим, что автомобиль не может передвигаться самостоятельно: все поездки инициируются удачливым пассажиром, который пришел на станцию, где есть автомобиль.

Введем следующие величины для всех i, $j \in \overline{1, N}$, $n \geqslant 1$:

- τ_{ij}, время поездки из узла i в узел j; эти переменные не зависят от входного процесса, но могут коррелировать друг с другом;
- $q_j(n)$, количество пассажиров в узле j в момент $t_n - 0$;
- v_n, множество узлов, в которых находится не меньше одного автомобиля в момент $t_n - 0$.

Введем следующие обозначения.

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\mathbf{E}\tau_{ij},\ \tau = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \tau_i.$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ поле действительных чисел. Пусть заданы множества $v, w \subset \mathcal{S}$. Обозначим через $|v|$ (соответственно, $|w|$) количество элементов v (соответственно, w). Предположим, что $|v| = k > 0$, $|w| = l > 0$. Упорядочим элементы v по возрастанию: $v = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\}$, где $v_1 < v_2 < \ldots < v_k$. Аналогичную операцию проделаем с множеством w. Для произвольного вектора $a \in \mathcal{R}^N$, ${}^t a = (a_1, \ldots, a_N)$ мы понимаем под a_v вектор из k компонент, имеющий следующий вид:

$${}^t a_v = (a_{v_1}, a_{v_2}, \ldots, a_{v_k}).$$

Обозначим через $\mathcal{M}_N$ множество квадратных матриц $N \times N$ с элементами из $\mathcal{R}$. Для произвольной матрицы из $A \in \mathcal{M}_N$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$ мы поднимаем под матрицей A_{vw}, матрицу из k строк и l столбцов, имеющую следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{v_1 w_1} & a_{v_1 w_2} & \cdots & a_{v_1 w_l} \\ a_{v_2 w_1} & a_{v_2 w_2} & \cdots & a_{v_2 w_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v_k w_1} & a_{v_k w_2} & \cdots & a_{v_k w_l} \end{pmatrix}.$$

Определим также матрицу $\tilde{A}_{vw} \in \mathcal{M}_N$, $\tilde{A}_{vw} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$ по правилу:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \in v,\ j \in w, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через 1_v матрицу из $|v|$ строк и 1 столбца, все элементы которой равны 1. Через $\mathbf{1}_{\{A_i(n)\}}$ (заметьте, что цифра "один" выделена жирным шрифтом) будем обозначать индикатор события $A_i(n)$. Обозначим через I единичную матрицу размера $N \times N$.

1.1. **Теоремы о поведении конкретных узлов сети.**

1.1.1. *Теорема [1,Theorem 3.3].* Я предлагаю следующую формулировку вместо формулировки теоремы [1, Theorem 3.3].

Теорема 1.1. *Предположим, что $\gamma = \pi$. Тогда все узлы транспортной сети*

(a) транзиентны, если $\lambda\tau > V$;

(b) нуль-рекуррентны, если $\lambda\tau < V$.

(c) Если выполнены условия пункта (b) и $N = 2$ или $N = 3$, то наша полинг-система является нуль-рекуррентной.

Пункт (c) дополняет классификацию теоремы [1, Theorem 2.2] *для* $N = 2, 3$ *в случае* $\tau \neq 0$.

Читатель может увидеть, что в пункте (b) теоремы 1.1 по сравнению с [1, Theorem 3.3] снято требование на конечность второго момента τ_{ij}. Также добавлен пункт (c), который невнятно прозвучал в [1, Theorem 3.3] предложением *and in this case all conclusions of theorem 2.2 hold.*

Как в [1] введем систему $\widetilde{Q}$ отличающуюся от системы Q только временем движения автомобилей, которое мы полагаем равным 0.

Рассмотрим автомобили в системе Q *как обслуживающие устройства, заявки которым поставляются автомобилями системы* $\widetilde{Q}$. Заявки поступают группами в моменты $t_1, t_2, \ldots$. Время обслуживания одной заявки равно времени перевозки пассажира. Количество заявок поступивших в момент t_n равно количеству поездок автомобиля в $\widetilde{Q}$ в результате прихода пассажира n. Если пассажир пришел в узел из $\bar{v}_n$ (что происходит с вероятностью ${}^t\pi_{\bar{v}_n} 1_{\bar{v}_n}$), то автомобиль в $\widetilde{Q}$ не едет и заявок нет. Если пассажир пришел в узел из v_n, то автомобиль в $\widetilde{Q}$ совершает $k \geqslant 1$ поездок по маршруту $i \to j_1 \to j_2 \to \ldots \to j_k$. Время которое потребуется автомобилю в Q на обслуживание этих заявок равно $\tau_{ij_1} + \tau_{j_1 j_2} + \ldots + \tau_{j_{k-1} j_k}$. Поскольку для любого $i \in v_n$ узел i пуст ($q_i(n) = 0$), то $j_1 \in \bar{v}_n$, $j_2 \in \bar{v}_n$, ..., $j_{k-1} \in \bar{v}_n$.

Если $j_k \in \bar{v}_n$, то вообразим, что автомобиль продолжает свое блуждание по узлам с номерами $j_{k+1}, \ldots, j_l$, до тех пор, пока не вернется в множество v_n (что означает $j_l \in v_n$). Предположим, что на эти блуждания он тратил столько времени, сколько требовалось для перевозки пассажиров по такому же маршруту. Тогда суммарное время реальных поездок плюс время "виртуальных" поездок равно $\tau_{ij_1} + \ldots + \tau_{j_{k-1} j_k} + \tau_{j_k j_{k+1}} + \ldots + \tau_{j_{l-1} j_l}$. Вероятность такого маршрута равна $\pi_i p_{ij_1} \ldots p_{j_{l-1} j_l}$, причем $i \in v_n$, $j_1 \in \bar{v}_n$, ..., $j_{l-1} \in \bar{v}_n$, $j_l \in v_n$.

Обозначим через S_v, где $v \subset \mathcal{S}$ случайную величину, которая при условии маршрута $i \to j_1 \to \ldots \to j_l$ принимает значение $\tau_{ij_1} + \ldots + \tau_{j_{l-1} j_l}$. Вероятность такого маршрута равна $\pi_i p_{ij_1} \ldots p_{j_{l-1} j_l}$, причем $i \in v$, $j_1 \in \bar{v}$, ..., $j_{l-1} \in \bar{v}$, $j_l \in v$. Случайная величина S_v принимает значение 0 с вероятностью ${}^t\pi_{\bar{v}} 1_{\bar{v}}$.

Достроенная нами траектория автомобиля имеет такое же распределение суммарного времени обслуживания как S_{v_n}. Заметим, что S_v имеет разное распределение в зависимости от v. Однако, справедлив следующий факт.

Лемма 1.2. *Для* v, *такого, что* $|v| \geqslant 1$, *математическое ожидание* S_v *равно* τ: $\mathbf{E} S_v = \tau$.

Перед доказательством определим операцию поэлементного умножения матриц, с помощью которой мы упростим запись выкладок. Бинарная операция $\odot$ сопоставляет матрицам A и B с одинаковым количеством строк и столбцов матрицу C с таким же количеством строк и столбцов, такую, что $C_{ij} = A_{ij}B_{ij}$. Введем матрицу $T = (T_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$, где $T_{ij} = \mathbf{E}\tau_{ij}$. В таких обозначениях можно записать $\tau = {}^t\pi(P \odot T)1_{\mathcal{S}}$.

Доказательство. (Лемма 1.2.) По формуле полной вероятности

$$\mathbf{E}S_v = \sum_{i\in v}\pi_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_{k-1}\in\bar v\\ j_k\in v}} p_{ij_1}\ldots p_{j_{k-1}j_k}(T_{ij_1}+\ldots+T_{j_{k-1}j_k}). \tag{1.1}$$

Если $|v| = N$, то последняя сумма конечна и равна

$$\mathbf{E}S_v = \sum_{i\in v}\pi_i \sum_{j_1\in v} p_{ij_1}T_{ij_1} = {}^t\pi(P\odot T)1_{\mathcal{S}} = \tau.$$

Рассмотрим случай $|v| < N$. Перепишем уравнение 1.1 в матричном виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}S_v = {}^t\pi_v[&\mathbf{P}_{vv}\odot T_{vv}\\ &+(\mathbf{P}_{v\bar v}\odot T_{v\bar v})\mathbf{P}_{\bar v v} + \mathbf{P}_{v\bar v}(\mathbf{P}_{\bar v v}\odot T_{\bar v v})\\ &+(\mathbf{P}_{v\bar v}\odot T_{v\bar v})\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\mathbf{P}_{\bar v v} + \mathbf{P}_{v\bar v}(\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\odot T_{\bar v\bar v})\mathbf{P}_{\bar v v} + \mathbf{P}_{v\bar v}\mathbf{P}_{\bar v\bar v}(\mathbf{P}_{\bar v v}\odot T_{\bar v v})\\ &+(\mathbf{P}_{v\bar v}\odot T_{v\bar v})\mathbf{P}_{\bar v\bar v}^2\mathbf{P}_{\bar v v} + \mathbf{P}_{v\bar v}(\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\odot T_{\bar v\bar v})\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\mathbf{P}_{\bar v v}\\ &\qquad+\mathbf{P}_{v\bar v}\mathbf{P}_{\bar v\bar v}(\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\odot T_{\bar v\bar v})\mathbf{P}_{\bar v v} + \mathbf{P}_{v\bar v}\mathbf{P}_{\bar v\bar v}^2(\mathbf{P}_{\bar v v}\odot T_{\bar v v})\\ &+\ldots]1_v.\end{aligned}$$

Мы выписали члены бесконечной суммы в 1.1 до $k = 4$ включительно. После того, как мы вынесем справа за скобку сумму $I_{\bar v\bar v} + \mathbf{P}_{\bar v\bar v} + \mathbf{P}_{\bar v\bar v}^2 + \ldots = (I_{\bar v\bar v} - \mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}$ (из леммы 1.5, формулировка и доказательство которой даны ниже, вытекает, что матрица $\mathbf{P}_{\bar v\bar v}$ имеет спектральный радиус меньший 1, а, следовательно, матрица $I_{\bar v\bar v} - \mathbf{P}_{\bar v\bar v}$ обратима) получим следующее выражение

$$\begin{aligned}\mathbf{E}S_v = {}^t\pi_v[&\mathbf{P}_{vv}\odot T_{vv}\\ &+(\mathbf{P}_{v\bar v}\odot T_{v\bar v})(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}\mathbf{P}_{\bar v v} + \mathbf{P}_{v\bar v}(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}(\mathbf{P}_{\bar v v}\odot T_{\bar v v})\\ &\qquad+\mathbf{P}_{v\bar v}(\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\odot T_{\bar v\bar v})(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}\mathbf{P}_{\bar v v}\\ &\qquad+\mathbf{P}_{v\bar v}\mathbf{P}_{\bar v\bar v}(\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\odot T_{\bar v\bar v})(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}\mathbf{P}_{\bar v v}\\ &\qquad+\mathbf{P}_{v\bar v}\mathbf{P}_{\bar v\bar v}^2(\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\odot T_{\bar v\bar v})(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}\mathbf{P}_{\bar v v}\\ &+\ldots]1_v.\end{aligned}$$

Вынесем теперь $I_{\bar v\bar v} + \mathbf{P}_{\bar v\bar v} + \mathbf{P}_{\bar v\bar v}^2 + \ldots = (I_{\bar v\bar v} - \mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}$ за скобку слева и получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}S_v = {}^t\pi_v[&\mathbf{P}_{vv}\odot T_{vv} + (\mathbf{P}_{v\bar v}\odot T_{v\bar v})(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}\mathbf{P}_{\bar v v} + \mathbf{P}_{v\bar v}(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}(\mathbf{P}_{\bar v v}\odot T_{\bar v v})\\ &+\mathbf{P}_{v\bar v}(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}(\mathbf{P}_{\bar v\bar v}\odot T_{\bar v\bar v})(I_{\bar v\bar v}-\mathbf{P}_{\bar v\bar v})^{-1}\mathbf{P}_{\bar v v}]1_v.\end{aligned}$$

Для того, чтобы упростить это выражение мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1.3. *Для матриц P и Q размера $k \times l$ и $k \times k$ таких, что*

1) для $i = \overline{1,k}$ $\sum_{j=1}^{l} p_{ij} + \sum_{j=1}^{k} q_{ij} = 1$,

2) $(I - Q)$ — обратима,

справедливо тождество:

$$(I - Q)^{-1} P 1_l = 1_k.$$

Здесь 1_l обозначает матрицу-столбец из l единиц, 1_k, соответственно, из k единиц, а I — единичную матрицу $k \times k$.

Доказательство. Ввиду условия 2, утверждение леммы эквивалентно равенству

$$P 1_l = (I - Q) 1_k.$$

Последнее означает, что

$$\text{для } i = \overline{1,k} \text{ выполнено } \sum_{j=1}^{l} p_{ij} = 1 - \sum_{j=1}^{k} q_{ij}.$$

Справедливость последнего утверждения вытекает из условия 1. □

Из леммы 1.3 следует, что $(I_{\bar{v}\bar{v}} - \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}})^{-1} \mathbf{P}_{\bar{v}v} 1_v = 1_{\bar{v}}$ и выражение для математического ожидания принимает следующий вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E} S_v = {}^t\pi_v(\mathbf{P}_{vv} \odot T_{vv}) 1_v + {}^t\pi_v(\mathbf{P}_{v\bar{v}} \odot T_{v\bar{v}}) 1_{\bar{v}} + \\ {}^t\pi_v \mathbf{P}_{v\bar{v}} (I_{\bar{v}\bar{v}} - \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}})^{-1} (\mathbf{P}_{\bar{v}v} \odot T_{\bar{v}v}) 1_v + {}^t\pi_v \mathbf{P}_{v\bar{v}} (I_{\bar{v}\bar{v}} - \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}})^{-1} (\mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}} \odot T_{\bar{v}\bar{v}}) 1_{\bar{v}}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Из инвариантности меры π относительно $\mathbf{P}$ вытекают два равенства

$${}^t\pi_v \mathbf{P}_{vv} + {}^t\pi_{\bar{v}} \mathbf{P}_{\bar{v}v} = {}^t\pi_v, \tag{1.3}$$

$${}^t\pi_v \mathbf{P}_{v\bar{v}} + {}^t\pi_{\bar{v}} \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}} = {}^t\pi_{\bar{v}}, \tag{1.4}$$

Чтобы упростить выражение 1.2 воспользуемся тождеством 1.4, которое можно записать в виде ${}^t\pi_v \mathbf{P}_{v\bar{v}} = {}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}\bar{v}} - \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}})$ и после подстановки получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E} S_v = {}^t\pi_v(\mathbf{P}_{vv} \odot T_{vv}) 1_v + {}^t\pi_v(\mathbf{P}_{v\bar{v}} \odot T_{v\bar{v}}) 1_{\bar{v}} + {}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}\bar{v}} - \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}})(I_{\bar{v}\bar{v}} - \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}})^{-1}(\mathbf{P}_{\bar{v}v} \odot T_{\bar{v}v}) 1_v \\ + {}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}\bar{v}} - \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}})(I_{\bar{v}\bar{v}} - \mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}})^{-1}(\mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}} \odot T_{\bar{v}\bar{v}}) 1_{\bar{v}} \\ = {}^t\pi_v(\mathbf{P}_{vv} \odot T_{vv}) 1_v + {}^t\pi_v(\mathbf{P}_{v\bar{v}} \odot T_{v\bar{v}}) 1_{\bar{v}} + {}^t\pi_{\bar{v}}(\mathbf{P}_{\bar{v}v} \odot T_{\bar{v}v}) 1_v + {}^t\pi_{\bar{v}}(\mathbf{P}_{\bar{v}\bar{v}} \odot T_{\bar{v}\bar{v}}) 1_{\bar{v}} \\ = {}^t\pi(\mathbf{P} \odot T) 1_{\mathcal{S}} = \tau.\end{aligned}$$

Лемма 1.2 полностью доказана. □

Доказательство. (Теорема 1.1) Положим $V = 1$. Мы можем рассматривать автомобиль в Q как систему массового обслуживания, которая в моменты t_n получает заявки от автомобиля из $\widetilde{Q}$. Заявок либо не приходит ни одной, либо одна и больше. Количество заявок равно количеству поездок автомобиля в $\widetilde{Q}$ в результате прихода пассажира n. Обозначим через w_n, $n \geqslant 2$, время, которое ждала начала обслуживания партия пассажиров n (если в партии совсем не было пассажиров, то на ее обслуживание время не тратится). Пусть $\eta(n)$ время, которое потребовалось на обслуживание n-й партии вызовов автомобилю в Q. Тогда $w_n = \max(0, w_{n-1}+\eta(n-1)-a_n)$. Ранее мы построили величину $S_{v_n} \geqslant \eta(n)$. Поэтому процесс $u_n = \max(0, u_{n-1} + S_{v_{n-1}} - a_n)$ оценивает процесс w_n сверху по траекториям.

В условиях теоремы $\mathbf{E}S_{v_n} = \tau$ независимо от n и $\mathbf{E}(S_{v_{n-1}} - a_n) = \tau - 1/\lambda < 0$. Из теоремы 1.4 следует, что $\forall c \in (0,1)$ $\exists x$ $\exists m$: $\forall n > m$ $\mathbf{P}\{u_n > x\} < c$. Поэтому можно определить собственную случайную величину Y, такую, что $\mathbf{P}\{Y > x\} = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{u_n > x\}$.

Предположим, что какой-нибудь узел i транзиентен, т.е. $q_i(n) \to \infty$ почти наверное. Теорема [1, Theorem 3.2] гарантирует существование возрастающей до бесконечности последовательности T_k такой, что $\tilde{q}(T_k) = 0$. Тогда $q_i(T_k) - \tilde{q}_i(T_k) \to \infty$ почти наверное. Следовательно, $u_{T_k} \to \infty$ почти наверное. Выберем x такое, что $\mathbf{P}\{Y > x\} = \gamma < 1$. Тогда $\mathbf{P}\{u_{T_k} > x\} \to 1$, что противоречит тому, что $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{u_n > x\} = \gamma < 1$. Теорема 1.1 доказана. $\square$

Рассмотрим рекуррентное уравнение $u_n = \max(0, u_{n-1} + \xi_{n-1})$, с начальным условием u_0; $\xi_n = \zeta_n - S_{v_n}$, где ζ_n стационарная в узком смысле, метрически транзитивная последовательность, $\mathbf{E}\zeta_n = 1/\lambda$, S_{v_n} — последовательность независимых случайных величин $\mathbf{E}S_{v_n} = \tau$. Хорошо известно (см. [2, ¶3.5]), что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \zeta_n \to \frac{1}{\lambda} \text{ с вероятностью 1.}$$

Теорема 1.4. *Если* $1/\lambda - \tau < 0$, *то* $\forall c \in (0,1)$ $\exists x$ $\exists m$: $\forall n > m\mathbf{P}\{w_n > x\} < c$.

Перед доказательством введем следующие обозначения.

$$X_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,\ X_0 = 0.$$

Метрическую последовательность ζ_n можно продолжить на отрицательные индексы: ζ_{-1}, ζ_{-2}, $\ldots$. Определим

$$Y_n = \zeta_{-1} + \zeta_{-2} + \ldots + \zeta_{-n},\ Y_0 = 0,$$

$$V_{nk} = \sum_{j=k}^{n} S_{v_j}.$$

Доказательство. Ввиду [2, ¶3.1, теорема 1]

$$u_{n+1} = \max(X_n + u_n, X_n - X_1, \ldots, X_n - X_n)$$

и мы можем записать

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{u_{n+1} > x\} &= \mathbf{P}\{\max(X_n - X_0, \dots, X_n - X_n) > x\} + \\ &+\mathbf{P}\{\max(X_n + w_n, X_n - X_1, \dots, X_n - X_n) \leqslant x, X_n + u_1 > x\} \leqslant \\ &\leqslant \mathbf{P}\{\max(X_n - X_0, \dots, X_n - X_n) > x\} + \mathbf{P}\{x - u_1 < X_n \leqslant x\}.\end{aligned}$$

Ввиду усиленного закона больших чисел ([3, II,с.277–279])

$$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\zeta_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{v_j} \to \frac{1}{\lambda} - \tau < 0 \text{ с вероятностью } 1.$$

Поэтому $\forall x > 0$ $\mathbf{P}\{(x - u_1)/n < X_n/n \leqslant x/n\} \to 0$, поскольку $(x - w_1)/n \to 0$, а $X_n/n \to 1/\lambda - \tau < 0$, а следовательно, существует такое n_0, что $\forall n > n_0 \mathbf{P}\{x - u_1 < X_n \leqslant x\} < c/4$. Перейдем к оценке вероятности

$$\mathbf{P}\{\max(X_n - X_0, \dots, X_n - X_n) > x\} = \mathbf{P}\{\max(Y_n - V_{n1}, \dots, Y_1 - V_{nn}, 0) > x\}.$$

Стоп. $\square$

1.1.2. *Спектральный радиус подматрицы стохастической матрицы.* Обозначим через $\rho(A)$ спектральный радиус матрицы A. Поскольку собственные значения матрицы и транспонированной к ней совпадают, то $\rho(A) = \rho({}^tA)$.

Этот раздел будет посвящен доказательству следующей вспомогательной леммы, которая была использована ранее.

Лемма 1.5. *Спектральный радиус подматрицы P_{vv} $(0 < |v| < N)$ неразложимой стохастической матрицы $P \in \mathcal{M}_N$ строго меньше 1:*

$$\rho(P_{vv}) < \rho(P) = 1.$$

Доказательство базируется на утверждениях относительно неотрицательных матриц, которые приведены в [4]. Для вектора $x \in \mathcal{R}^N$ мы пишем $x > 0$ $(x \geqslant 0)$ если для $i = \overline{1, N}$ $x_i > 0$ $(x_i \geqslant 0)$. Для матрицы $A \in \mathcal{M}_N$ мы пишем $A > 0$ $(A \geqslant 0)$ если для $i, j = \overline{1, N}$ $a_{ij} > 0$ $(a_{ij} \geqslant 0)$. Для двух матриц A и B (векторов x и y) мы пишем $A \geqslant B$, $A > B$ $(x \geqslant y,\ x > y)$, если $A - B \geqslant 0$, $A - B > 0$ $(x - y \geqslant 0,\ x - y > 0)$. Аналогичным образом определяются отношения $\leqslant$ и $<$. Мы также будем использовать обозначения, которые определены во введении.

Для доказательства леммы 1.5 нам потребуются четыре классических результата, доказательство которых читатель может найти в [4, Глава 8], где они приведены за номерами **8.1.19**, **8.1.29**, **8.2.2** и **8.4.1**.

Лемма 1.6 (8.1.19). *Пусть $A, B \in \mathcal{M}_N$. Если $0 \leqslant A \leqslant B$, то $0 \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(B)$.*

Лемма 1.7 (8.1.29). *Пусть $A \in \mathcal{M}_N$, $x \in \mathcal{R}^N$, и предположим, что $A \geqslant 0$ и $x > 0$. Если числа α, $\beta \geqslant 0$ таковы, что $\alpha x \leqslant Ax \leqslant \beta x$, то $\alpha \leqslant \rho(A) \leqslant \beta$. Если $\alpha x < Ax$, то $\alpha < \rho(A)$; если $Ax < \beta x$, то $\rho(A) < \beta$.*

Теорема 1.8 (Перрон, 8.2.6). *Пусть $A \in \mathcal{M}_N$ и предположим, что $A > 0$. Существует единственный вектор x такой, что $Ax = \rho(A)x$, $x > 0$ и $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$.*

Лемма 1.9 (8.4.1). *Неотрицательная матрица $A \in \mathcal{M}_N$ является неразложимой тогда и только тогда, когда $(I + A)^{N-1} > 0$.*

Доказательство этих лемм читатель обнаружит там же, в [4, Глава 8].

Лемма 1.10. *Пусть $A \in \mathcal{M}_N$ и $A > 0$. Тогда для подматрицы A_{vv}, такой, что $0 < |v| < N$, выполнено:*

$$\rho(A_{vv}) < \rho(A).$$

Доказательство. Ввиду теоремы 1.8 существует единственный вектор x, такой, что $x > 0$ и $Ax = \rho(A)x$. Из того, что $x > 0$ и $A > 0$ следует, что

$$\tilde{A}_{vv}x < Ax = \rho(A)x.$$

Из леммы 1.7 следует, что $\rho(\tilde{A}_{vv}) < \rho(A)$. Остается заметить, что $\rho(\tilde{A}_{vv}) = \rho(A_{vv})$. □

Приступим к доказательству леммы 1.5.

Доказательство. (Лемма 1.5.) Из неразложимости матрицы P и леммы 1.9 следует, что $(I + P)^{N-1} > 0$. Поскольку $P \geqslant 0$,

$$(I_{vv} + P_{vv})^{N-1} \leqslant ((I + P)^{N-1})_{vv}.$$

Ввиду леммы 1.6 справедлива оценка

$$\rho((I_{vv} + P_{vv})^{N-1}) \leqslant \rho(((I + P)^{N-1})_{vv}). \tag{1.5}$$

Из леммы 1.10 следует, что

$$\rho(((I + P)^{N-1})_{vv}) < \rho((I + P)^{N-1}). \tag{1.6}$$

Из неотрицательности P и P_{vv} следует, что

$$\rho((I + P)^{N-1}) = (1 + \rho(P))^{N-1} \text{ и } \rho((I_{vv} + P_{vv})^{N-1}) = (1 + \rho(P_{vv}))^{N-1}.$$

Остается заметить, что ввиду 1.5 и 1.6 справедливо неравенство

$$(1 + \rho(P_{vv}))^{N-1} < (1 + \rho(P))^{N-1},$$

непосредственно из которого вытекает утверждение леммы. □

1.1.3. *Закон больших чисел для обратных сумм.*

Теорема 1.11. *(“Неравенство для обратных сумм независимых случайных величин.”) Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *— независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием* $\mathbf{E}X_k = 0$*, и дисперсиями* $\mathbf{D}X_k = \sigma_k$*,*

$$S_i = \sum_{n-i+1}^{n} X_i.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\max(|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|) > x\} \leqslant x^{-2}\mathbf{E}S_n^2. \tag{1.7}$$

Доказательство. Обозначим $x^2 = t$ и введем события $A_j = \{S_j^2 > t,\ S_\nu^2 \leqslant t$ для $\nu = \overline{1, j-1}\}$. Неравенство 1.7 можно записать следующим образом

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{A_j\} \leqslant t^{-1}\mathbf{E}(S_n^2). \tag{1.8}$$

Пользуясь аддитивностью математического ожидания, запишем

$$\mathbf{E}(S_n^2) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{n} S_n^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}).$$

Докажем неравенство

$$\mathbf{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}) \geqslant \mathbf{E}(S_j^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}). \tag{1.9}$$

Для этого положим $S_n = S_j + (S_n - S_j)$.

$$\mathbf{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}) = \mathbf{E}(S_j^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}) + 2\mathbf{E}((S_n - S_j)S_j \mathbf{1}_{\{A_j\}}) + \mathbf{E}((S_n - S_j)^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}). \tag{1.10}$$

Поскольку

$$S_n - S_j = X_1 + \ldots + X_{n-j},$$

$$S_j = X_{n-j+1} + X_{n-j+2} + \ldots + X_n$$

и $\mathbf{1}_{\{A_j\}}$ зависит только от $X_{n-j+1}, X_{n-j+2}, \ldots, X_n$, то $(S_n - S_j)$ и $S_j \mathbf{1}_{\{A_j\}}$ независимы. Следовательно,

$$\mathbf{E}((S_n - S_j)S_j \mathbf{1}_{\{A_j\}}) = \mathbf{E}(S_n - S_j)\mathbf{E}(S_j \mathbf{1}_{\{A_j\}}) = 0.$$

Из последнего выражения и 1.10 следует 1.9. Так как $S_j^2 > t$ когда A_j, то $\mathbf{E}(S_j^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}) \geqslant t\mathbf{P}\{A_j\}$. Следовательно,

$$\mathbf{E}(S_n^2) \geqslant \sum_{j=1}^{n} (S_n^2 \mathbf{1}_{\{A_j\}}) \geqslant t\mathbf{P}\{A_j\},$$

откуда вытекает 1.8, что и требовалось доказать. □

Пусть X_1, X_2, … — последовательность независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием, обозначим $S_{nk} = \sum_{j=k}^{n} X_j$. Введем событие $A_m(\varepsilon) = \{$ при некотором $n > m$ $\max(|S_{nm}|, |S_{n,m+1}|, \ldots, |S_{nn}|) > \varepsilon\}$.

Теорема 1.12. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_k^2) < \infty,$$

то $\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists m$: $\mathbf{P}\{A_m(\varepsilon)\} < \delta$.

Доказательство. Событие $A_m(\varepsilon)$ является пределом при $n \to \infty$ событий $A_{mn}(\varepsilon) = \{$ при некотором k, $m < k < n$ $\max(|S_{nk}|, |S_{n,k+1}|, \ldots, |S_{nn}|) > \varepsilon\}$. Ввиду теоремы 1.11

$$\mathbf{P}\{A_{mn}(\varepsilon)\} \leqslant \varepsilon^{-2} \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{E}(X_k^2).$$

Устремляя $n \to \infty$ получаем

$$\mathbf{P}\{A_m(\varepsilon)\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{A_{mn}(\varepsilon)\} \leqslant \varepsilon^{-2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathbf{E}(X_k^2).$$

Ввиду сходимости ряда $\sum \mathbf{E}(X_k^2)$ остаточный член $\sum_{k=m+1}^{\infty} \mathbf{E}(X_k^2)$ можно сделать сколь угодно малым, выбрав достаточно большое m. □

Пусть X_1, X_2, … — последовательность независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Обозначим $S_{nk} = \sum_{j=k}^{n} X_j$. Рассмотрим положительную числовую последовательность b_k $(k \in \mathbf{N})$, которая монотонно стремится к бесконечности: $b_k < b_{k+1}$ при $k \in \mathbf{N}$, $b_k \to \infty$. Обозначим

$$T_{nk} = \sum_{j=k}^{n} b_j^{-1} X_j.$$

Введем события $B_m(\varepsilon) = \{$ при некотором $n > m$ $\max(|T_{nm}|, |T_{n,m+1}|, \ldots, |T_{nn}|) > \varepsilon\}$ и $C_m(\varepsilon) = \{$ при некотором $n > m$ $\max(b_n^{-1}|S_{nm}|, b_n^{-1}|S_{n,m+1}|, \ldots, b_n^{-1}|S_{nn}|) > \varepsilon\}$.

Теорема 1.13. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-2} \mathbf{E}(X_k^2) < \infty,$$

то

$$\forall\varepsilon\, \forall\delta\, \exists m:\ \mathbf{P}\{B_m(\varepsilon)\} < \delta. \tag{1.11}$$

Кроме того,

$$\forall\varepsilon_1\, \forall\delta_1\, \exists m:\ \mathbf{P}\{C_m(\varepsilon_1)\} < \delta_1. \tag{1.12}$$

Доказательство. Утверждение 1.11 следует из теоремы 1.12, примененной к величинам $b_k^{-1}X_k$.

Докажем утверждение 1.12. Можно доказывать существование нужного m для дополнения такого, что

$$\mathbf{P}\{\neg C_m(\varepsilon_1)\} = 1 - \mathbf{P}\{C_m(\varepsilon_1)\} > 1 - \delta_1. \tag{1.13}$$

Из усиленного закона больших чисел ([3, II,с.277–279]) следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-1}X_k$ сходится почти наверное. Поэтому мы можем применить лемму 1.14, из которой вытекает включение $(\neg B_m(\varepsilon)) \subset (\neg C_m(2\varepsilon))$. Поэтому $\mathbf{P}\{\neg C_m(2\varepsilon)\} \geqslant \mathbf{P}\{\neg B_m(\varepsilon)\}$. Выбирая $\varepsilon = \varepsilon_1/2$ и $\delta = \delta_1$ из 1.11 и неравенства 1.13 следует утверждение 1.12. □

Рассмотрим числовую последовательность x_k, $k \in \mathbf{N}$. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-1}x_k$ сходится .

Введем величины $t_{nk} = \sum_{j=k}^{n} b_j^{-1}x_j$, $\rho_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j^{-1}x_j$, $s_{nk} = \sum_{j=k}^{n}$.

Лемма 1.14. *Если*

$$\forall n > m \ \max(|t_{nm}|, |t_{n,m+1}|, \dots, |t_{nn}| \leqslant \varepsilon), \tag{1.14}$$

то

$$\forall n > m \ \max(b_n^{-1}|s_{nm}|, b_n^{-1}|s_{n,m+1}, \dots, b_n^{-1}|s_{nn}|) \leqslant 2\varepsilon. \tag{1.15}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что $b_n^{-1}|s_{nn}| = |t_{nn}|$. Далее, из 1.14 следует $\forall k$ $\forall n$ $n > k \geqslant m$: $|t_{nk}| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, для всех $k > m$ $|\rho_k| = \lim_{n\to\infty} |t_{nk}| \leqslant \varepsilon$. Пользуясь тождеством $x_k = b_k(\rho_{k-1} - \rho_k)$, запишем для $k = \overline{m, n-1}$

$$\frac{s_{nk}}{b_n} = \frac{b_k(\rho_k - \rho_{k+1}) + \ldots + b_n(\rho_{n-1} - \rho_n)}{b_n} = \frac{b_k}{b_n}\rho_{k-1} + \frac{1}{b_n}\sum_{j=k}^{n-1} \rho_j(b_{j+1} - b_j) - \rho_n.$$

Оценим модуль последней суммы через сумму модулей с учетом $|\rho_k| < \varepsilon$:

$$\frac{s_{nk}}{b_n} \leqslant \frac{b_k}{b_n}\varepsilon + \frac{b_n - b_k}{b_n}\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

1.1.4. *Теорема [1,Theorem 3.4].* Определение транспортной сети Q^{Λ} для $\gamma = \pi$ представляется мне неверным. Действительно, предположение, что автомобиль никогда не останавливается в $\bar{\Lambda}$ влечет, что время его пребывания в $\bar{\Lambda}$ ограничено. Но, если все автомобили перебазируются в $\bar{\Lambda}$ (а такое событие в системе $Q(t)$ произойдет с вероятностью 1), то они будут пребывать там время, математическое ожидание которого неограничено.

На мой взгляд, теореме [1, Theorem 3.4] следует придать следующую формулировку.

Теорема 1.15. *Пусть $\gamma = \pi$. Вероятность того, что событие $A = \{$все узлы Λ свободны от очереди$\}$ произойдет бесконечное число раз для $|\Lambda| \geqslant 4$ равна 0.*

Этот результат представляется уже вполне естественным, поскольку для $|\Lambda| = k$ мы имеем в некотором роде симметричное случайное блуждание на неограниченной решетке в пространстве размерности $k-1$. Для симметричного случайного блуждания в пространстве размерности 1, 2 блуждание возвратно, а для размерности $\geqslant 3$ оно уже не является возвратным. Последнее для нашей системы и утверждается в новой формулировке.

Доказательство. Для доказательства можно воспользоваться аргументацией, использованной в [1, Theorem 2.2]. Пусть $\Lambda = \{i_1, \ldots, i_k\}$.

$$\mathbf{P}\{q_{i_1}(n) = \cdots = q_{i_k}(n) = 0\} \leqslant \mathbf{P}\{\forall i \in \Lambda : \nu_i(n) = \tilde{\nu}_i(n)\} \sim \frac{C}{n^{(k-1)/2}}.$$

Поскольку $k = |\Lambda| \geqslant 4$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{q_{i_1}(n) = \cdots = q_{i_k}(n) = 0\} < \infty,$$

и для завершения доказательства остается применить лемму Бореля-Кантелли. $\square$

1.1.5. *Теорема [1, Theorem 3.5].* Построение процесса $Q^{\Lambda}(t)$ оправдано в теореме классификации [1, Theorem 3.5] в случае $\gamma \neq \pi$. К сожалению, необходимо констатировать, что доказательство этой теоремы в пункте (a) некорректно. Кроме того, в пункте (c) [1, Theorem 3.5] слегка неверна формулировка.

Приведем правильную формулировку [1, Theorem 3.5] и доказательство пункта (a).

Теорема 1.16. *Занумеруем узлы таким образом, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\frac{\gamma_1}{\pi_1} = \cdots = \frac{\gamma_{l-1}}{\pi_{l-1}} < \frac{\gamma_l}{\pi_l} \leqslant \cdots \leqslant \frac{\gamma_N}{\pi_N}.$$

(a) Для любого $i \geqslant l$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_i(n) = \infty$ п.н.

(b) Пусть $l = 2$. Положим $\rho_1 = \frac{\lambda\tau\gamma_1}{\pi_1}$. Тогда

- *при $\rho_1 < V$, узел 1 эргодичен,*
- *при $\rho_1 > V$, узел 1 транзиентен.*

(c) Предположим, что $l \geqslant 3$. Тогда, начиная с некоторого случайного n множество узлов $\Lambda = \{1, \ldots, l-1\}$ ведет себя как полинг-система с параметрами γ^{Λ}, π^{Λ} и $\mathbf{P}^{\Lambda}$, которая была определена перед [1, Theorem 3.4].

Доказательство. (Пункт (a)) Для доказательства мы воспользуемся [1, Theorem 2.1], в которой, в частности, утверждается, что для любого k такого, что

$$\gamma_k > \sum_{i=1}^{N} \gamma_i p_{ik}$$

узел k транзиентен.

Введем множество $v = \{1, \ldots, l-1\}$. Из условия теоремы следует, что для некоторого $\alpha > 0$

$$\gamma_v = \alpha\pi_v \text{ и } \gamma_{\bar{v}} > \alpha\pi_{\bar{v}}.$$

Воспользуемся тождеством 1.3 для проверки, что $\forall k \in v$: $\gamma_k \leqslant \sum_{i=1}^{N} \gamma_i p_{ik}$. В векторном виде последнее неравенство можно записать следующим образом:

$$^t\gamma_v \leqslant {}^t\gamma_v \mathbf{P}_{vv} + {}^t\gamma_{\bar{v}} \mathbf{P}_{\bar{v}v} \tag{1.16}$$

Преобразуем правую часть, воспользовавшись уравнениями $\gamma_v = \alpha\pi_v$ и 1.3.

$$\begin{aligned} {}^t\gamma_v \mathbf{P}_{vv} + {}^t\gamma_{\bar{v}} \mathbf{P}_{\bar{v}v} = \alpha \cdot {}^t\pi_v \mathbf{P}_{vv} + {}^t\gamma_{\bar{v}} \mathbf{P}_{\bar{v}v} = \\ \alpha \cdot {}^t\pi_v - \alpha \cdot {}^t\pi_{\bar{v}} \mathbf{P}_{\bar{v}v} + {}^t\gamma_{\bar{v}} \mathbf{P}_{\bar{v}v} = \gamma_v + {}^t(\gamma_{\bar{v}} - \alpha\pi_{\bar{v}}) \mathbf{P}_{\bar{v}v}. \end{aligned}$$

Ввиду $\gamma_{\bar{v}} > \alpha\pi_{\bar{v}}$,

$$^t(\gamma_{\bar{v}} - \alpha\pi_{\bar{v}}) \mathbf{P}_{\bar{v}v} \geqslant 0,$$

а, следовательно, 1.16 справедливо.

Поэтому множество $\bar{\Lambda}$ таких узлов, что $\forall k \in \bar{\Lambda}$ $\gamma_k > \sum_{i=1}^{N} \gamma_i p_{ik}$ включено в $\bar{v}$: $\bar{\Lambda} \subset \bar{v}$. Ввиду [1, Theorem 2.1], все узлы $\bar{\Lambda}$ транзиентны. Следовательно, начиная с определенного случайного номера n_0, автомобили никогда не останавливаются в $\bar{\Lambda}$, а следовательно, построение проведенное перед [1, Theorem 3.4] соответствует истине в том смысле, что $Q^{\Lambda}(t) = (Q(t))^{\Lambda}$. Остается заметить, что если $\Lambda \neq v$, то, воспользовавшись аналогичными соображениями для $Q^{\Lambda}(t)$ можно выделить множество узлов $\bar{\Lambda}_1$, $\bar{\Lambda}_1 \subset \bar{v} \cap \Lambda$ такое, что начиная со случайного номера $n_0 + n_1$ автомобили никогда не будут останавливаться в $\bar{\Lambda}_1 \cup \bar{\Lambda}$. Подобная редукция может продолжаться не более $N - l + 1$ шагов, что полностью завершает доказательство.

В заключение заметим, что попутно было доказано и утверждение (c). □

1.2. **Масштабирование времени и предельные законы.** В этом разделе я изложу свои соображения по поводу предельного закона.

Ввиду раздела 2, достаточно рассматривать случай $\tau = 0$.

Если для любого момента времени $n \in \overline{n_0, n_1}$ автомобили находятся в одном и том же множестве $v_n = v_{n_0}$, то мы имеем многомерное случайное блуждание в пространстве размерности $|\bar{v}_{n_0}|$, которое можно аппроксимировать с помощью масштабированного броуновского движения.

Проблема возникает в том, что ввиду теоремы [1, Theorem 3.2] смена v_n происходит бесконечно много раз. Дело еще более усложняется ввиду того, что промежутки между сменой узлов v_n неограничены.

К счастью, имеются основания полагать, что для почти всех n $|v_n| = 1$. Ясно, что вектор очередей $q_{v_n}(n) \in \mathcal{R}_+^{|v_n|}$. Возникает идея масштабировать $q_{v_n}(n)$ таким образом, чтобы оно сближалось со стандартным многомерным броуновским движением b_{v_n}. Поскольку почти всегда $|v_n| = 1$, то можно отвлечься от v_n и, совместив все b_{v_n}, получить броуновское движение с отражением.

1.2.1. *Перебазирование автомобилей.* Для того, чтобы пройти путь доказательства, необходимо изучить процесс перебазирования автомобилей, сконцентрированных в одном узле, в другой узел. После несложных вычислений легко убедиться, что при $\gamma = \pi$ этот процесс представляет собой классическую задачу о разорении (см. [3]) при игре двух игроков, капитал одного из которых составляет $V - 1$, а капитал второго, соответственно, 1. Для этой задачи известен, например, результат, который говорит, что первый игрок выигрывает (то есть, автомобили остаются на месте) с вероятностью $(V-1)/V$ и первый игрок проигрывает (то есть, автомобили переходят в новый узел) с вероятностью $1/V$. Это в частности, позволяет предложить в качестве предельной модели модель диффузии в исходном фазовом пространстве (на “углах”) с эластичными экранами на границах.

Любопытно, что если в игре принимает участие k игроков (автомобили распределены по k узлам), то для каждого игрока игра является справедливой. Поясним последнее. Если $k > 2$, то на каждом ходу разыгрывается один автомобиль. Автомобиль разыгрывается только между двумя игроками. Поэтому каждый игрок на конкретном ходу либо не принимает участия в розыгрыше, либо с одинаковыми вероятностями теряет или проигрывает автомобиль. В терминах случайного блуждания это можно описать так: на каждом ходу прибавляется случайная величина ξ, которая с вероятностью α принимает значение 0, с вероятностью $\beta/2$ принимает значение $+1$, с вероятностью $\beta/2$ принимает значение -1; при этом $\alpha + \beta = 1$.

Поскольку переходы будут достаточно редкими и время одного перехода в среднем равномерно ограничено сверху, то предельная теорема, по видимому, будет иметь место.

1.2.2. *Число поездок автомобиля.* Рассмотрим случайную величину ξ_{v_n}, которая равна количеству поездок одного из автомобилей в результате прихода пассажира n при условии, что автомобиль возвращается в один из узлов v_n $(v_{n+1} = v_n)$. Эта формулировка грешит неформальностью, поэтому запишем ξ_{v_n} в терминах табу-визитов

${}_{v_n}N_{ij}$:

$$\xi_{v_n} = \sum_{i\in v_n} \mathbf{1}_{\{A_i(n)\}}\left(1 + \sum_{k\in\bar{v}_n} {}_{v_n}N_{ik}\right). \tag{1.17}$$

Таким образом, ξ_{v_n} представляет собой оценку сверху на количество поездок автомобиля. Заметим, кстати, что эта оценка является *точной*. Действительно, если очереди в узлах $\bar{v}_n$ достаточно велики, то вероятность того, что автомобиль остановится в $\bar{v}_n$ будет сколь угодно мала, а следовательно вероятность того, что ξ_{v_n} строго больше истинного числа поездок автомобиля, становится малой. Аналитическая запись утверждения о точности оценки ξ_{v_n} приведена в разделе 1.2.4.

Из того, что случайные пары $\{(i(n), j(n)), n \geqslant 1\}$ независимы и одинаково распределены следует, что распределение величины ξ_{v_n} имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\xi_{v_n} = 0\} &= {}^t\pi_{\bar{v}} 1_{\bar{v}_n},\\
\mathbf{P}\{\xi_{v_n} = 1\} &= {}^t\pi_{v_n}\mathbf{P}_{v_n v_n} 1_{v_n},\\
\mathbf{P}\{\xi_{v_n} = 2\} &= {}^t\pi_{v_n}\mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n} 1_{v_n},\\
\mathbf{P}\{\xi_{v_n} = k\} &= {}^t\pi_{v_n}\mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n}\mathbf{P}^{k-2}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n} 1_{v_n},\ k \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Если $\bar{v}_n$ пусто, то $v_n = \mathcal{S}$ и $\mathbf{P}\{\xi_{\mathcal{S}} = 1\} = {}^t\pi\mathbf{P}1_{\mathcal{S}} = {}^t\pi 1_{\mathcal{S}} = 1$ и $\mathbf{E}\xi_{\mathcal{S}} = 1$, что вполне согласуется со здравым смыслом. Предположим, что $\bar{v}_n$ непусто. Если обозначить $\mathbf{P}^0_{\bar{v}_n\bar{v}_n} = I_{\bar{v}_n\bar{v}_n}$, где $I_{\bar{v}_n\bar{v}_n}$ — единичная матрица размера $|\bar{v}_n| \times |\bar{v}_n|$, то можно записать математическое ожидание ξ_{v_n} в следующем виде:

$$\mathbf{E}\xi = {}^t\pi_{v_n}\mathbf{P}_{v_n v_n}1_{v_n} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)({}^t\pi_{v_n}\mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n}\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n}).$$

Воспользуемся 1.4 для преобразования бесконечной суммы.

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)({}^t\pi_{\bar{v}} - {}^t\pi_{\bar{v}}\mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} =\\
&\quad {}^t\pi_{\bar{v}}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\mathbf{P}^{k+1}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\right)\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} =\\
&\quad {}^t\pi_{\bar{v}}\left(2I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\right)\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} =\\
&\quad {}^t\pi_{\bar{v}}\left(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\right)\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} =\\
&\quad {}^t\pi_{\bar{v}}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} + {}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n}
\end{aligned}$$

Заметим, что в последнем равенстве мы воспользовались тем, что собственные числа матрицы $\mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}$ по модулю строго меньше единицы, что следует из леммы 1.5.

Из леммы 1.3 следует, что $(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} = 1_{\bar{v}_n}$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\xi_{v_n} = {}^t\pi_{v_n}\mathbf{P}_{v_n v_n}1_{v_n} + {}^t\pi_{\bar{v}}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} + {}^t\pi_{\bar{v}}1_{\bar{v}_n}$$

Ввиду 1.3 можно записать математическое ожидание в следующем виде:

$$\mathbf{E}\xi_{v_n} = {}^t\pi_{v_n}1_{v_n} + {}^t\pi_{\bar{v}}1_{\bar{v}_n} = {}^t\pi 1_{\mathcal{S}} = 1.$$

Таким образом, для произвольного v_n математическое ожидание ξ_{v_n} равно 1. Дисперсия $\mathbf{D}\xi_{\mathcal{S}} = 0$. Найдем дисперсию ξ_{v_n} для $v_n \neq \mathcal{S}$: $\mathbf{D}\xi_{v_n} = \mathbf{E}(\xi_{v_n} - \mathbf{E}\xi_{v_n})^2 = \mathbf{E}(\xi_{v_n} - 1)^2$.

$$\mathbf{E}(\xi_{v_n} - 1)^2 = {}^t\pi_{\bar{v}}1_{\bar{v}_n} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot {}^t\pi_{v_n}\mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n}\mathbf{P}^{k-1}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n}.$$

Воспользуемся равенством 1.4 и леммой 1.3 для преобразования бесконечной суммы.

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2({}^t\pi_{\bar{v}} - {}^t\pi_{\bar{v}}\mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})\mathbf{P}^{k-1}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} = \\
&\quad {}^t\pi_{\bar{v}}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \sum_{k=1}^{\infty} k^2\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\right)\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} = \\
&\quad {}^t\pi_{\bar{v}}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} = \\
&\quad {}^t\pi_{\bar{v}}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} 2k\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} + {}^t\pi_{\bar{v}}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}^k_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} = \\
&\quad 2\cdot{}^t\pi_{\bar{v}}\left(\textstyle\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{P}^m_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{P}^l_{\bar{v}_n\bar{v}_n}\right)\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} + {}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} = \\
&\quad \left(2\cdot{}^t\pi_{\bar{v}}\textstyle\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{P}^m_{\bar{v}_n\bar{v}_n} + {}^t\pi_{\bar{v}}\right)(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1}\mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n}1_{v_n} = \\
&\quad (2\cdot{}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1} - {}^t\pi_{\bar{v}})1_{\bar{v}_n},
\end{aligned} \tag{1.18}$$

следовательно,

$$\mathbf{D}\xi_{v_n} = {}^t\pi_{\bar{v}}1_{\bar{v}_n} + (2\cdot{}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1} - {}^t\pi_{\bar{v}})1_{\bar{v}_n} = 2\cdot{}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1}1_{\bar{v}_n}.$$

Рассмотрим два частных случая, которые отражают суть последней формулы.

(1) Сеть с одинаковыми предпочтениями. Так мы называем сеть с переходной матрицей $\mathbf{P}$ такой, что $p_{ij} = \pi_j$ для $i,\ j = \overline{1,N}$. В этом случае

$$\mathbf{D}\xi_{v_n} = 2\frac{{}^t\pi_{\bar{v}}1_{\bar{v}_n}}{{}^t\pi_{v_n}1_{v_n}}.$$

(2) Симметричная сеть: $p_{ij} = 1/N$ для $i,\ j = \overline{1,N}$.

$$\mathbf{D}\xi_{v_n} = 2\frac{1 - |v_n|/N}{|v_n|/N}.$$

В частности, для $|v_n| = 1$

$$\mathbf{D}\xi_{v_n} = 2(N-1). \tag{1.19}$$

1.2.3. *Еще одна гипотеза.* Еще одна гипотеза базируется на следующем соображении: несмотря на то, что для конкретного узла предельного распределения нормированного числа пассажиров не существует, предельное распределение может существовать для некоторой линейной комбинации $(g_1 q_1(n) + \cdots + g_N q_N(n))/\sqrt{n}$.

Выпишем оценку сверху на изменение числа пассажиров в узле $k \in \bar{v}_n$:

$$q_k(n+1) - q_k(n) \geqslant \nu_{kv_n} = \mathbf{1}_{\{A_k(n)\}} - \sum_{i \in v_n} {}_{v_n}N_{ik}\, \mathbf{1}_{\{A_{i(n)}\}}$$

Эта оценка полностью совпадает с формулой [1, (3.2)]. Из формулы 1.17 для ξ_{v_n} следует, что

$$\sum_{j \in \bar{v}_n} \nu_{jv_n} = 1 - \xi_{v_n}. \tag{1.20}$$

Положим $\nu_{kv_n} = 0$ если $k \in v_n$. Заметим, что в этом случае $\nu_{kv_n} = q_k(n+1) - q_k(n)$. В доказательстве теоремы [1, Theorem 3.1] уже было показано, что $\mathbf{E}\nu_{kv_n} = 0$. Поэтому для $k \in \bar{v}_n$ $\mathbf{D}\nu_{kv_n} = \mathbf{E}\nu_{kv_n}^2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\nu_{kv_n} &= \mathbf{E}\big(\mathbf{1}_{\{A_k(n)\}} - \textstyle\sum_{i \in v_n} {}_{v_n}N_{ik}\, \mathbf{1}_{\{A_i(n)\}}\big)^2 \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A_k(n)\}})^2 - 2\mathbf{E}\mathbf{1}_{\{A_k(n)\}} \textstyle\sum_{i \in v_n} {}_{v_n}N_{ik}\, \mathbf{1}_{\{A_i(n)\}} + \mathbf{E}\big(\textstyle\sum_{i \in v_n} {}_{v_n}N_{ik}\, \mathbf{1}_{\{A_i(n)\}}\big)^2 \\ &\overset{(1)}{=} \mathbf{E}\mathbf{1}_{\{A_k(n)\}} + \textstyle\sum_{i \in v_n} \mathbf{E}\big({}_{v_n}N_{ik}\big)^2 \mathbf{E}\mathbf{1}_{\{A_i(n)\}} \overset{(2)}{=} \pi_k + \textstyle\sum_{i \in v_n} \pi_i \mathbf{E}\big({}_{v_n}N_{ik}\big)^2.\end{aligned}$$

В переходе (1) мы воспользовались несовместностью событий $\mathbf{1}_{\{A_{i(n)}\}}$ и $\mathbf{1}_{\{A_{k(n)}\}}$ для $i \neq k$, в переходе (2) мы воспользовались независимостью случайных величин ${}_{v_n}N_{ik}$ и $A_{i(n)}$. Для того, чтобы подсчитать $\mathbf{E}\big({}_{v_n}N_{ik}\big)^2$ заметим, что

$$\mathbf{P}\{{}_{v_n}N_{ik} \geqslant q\} = (\mathbf{P}_{\{i\}\bar{v}_n} \mathbf{P}^{q-1}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})_k.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{{}_{v_n}N_{ik} = q\} = \mathbf{P}\{{}_{v_n}N_{ik} \geqslant q\} - \mathbf{P}\{{}_{v_n}N_{ik} \geqslant q+1\} = (\mathbf{P}_{\{i\}\bar{v}_n} \mathbf{P}^{q-1}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}))_k.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i \in v_n} \pi_i \mathbf{E}\big({}_{v_n}N_{ik}\big)^2 = \sum_{i \in v_n} \pi_i \sum_{q=1}^{\infty} q^2 (\mathbf{P}_{\{i\}\bar{v}_n} \mathbf{P}^{q-1}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}))_k$$

После перемены порядка суммирования можно записать

$$\sum_{i \in v_n} \pi_i \mathbf{E}\big({}_{v_n}N_{ik}\big)^2 = \left(\sum_{q=1}^{\infty} q^2 \cdot {}^t\pi_{\bar{v}} \mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n} \mathbf{P}^{q-1}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})\right)_k = (*).$$

Воспользовавшись равенством 1.4 мы аналогично 1.18 получаем:

$$\begin{aligned}(*) &= \left((2 \cdot {}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1} - {}^t\pi_{\bar{v}})(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})\right)_k = \\ &\left(2 \cdot {}^t\pi_{\bar{v}}(I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1} - {}^t\pi_{\bar{v}}\right)_k.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{D}\nu_{kv_n} = \pi_k + \left(2 \cdot {}^t\pi_{\bar v}(I_{\bar v_n \bar v_n} - \mathbf{P}_{\bar v_n \bar v_n})^{-1} - {}^t\pi_{\bar v}\right)_k = \left(2 \cdot {}^t\pi_{\bar v}(I_{\bar v_n \bar v_n} - \mathbf{P}_{\bar v_n \bar v_n})^{-1}\right)_k.$$

Ввиду 1.20 $\mathbf{D}\xi_{v_n} = \mathbf{E}(\xi_{v_n} - 1)^2 = \mathbf{D}(\sum_{j\in\bar v_n} \nu_{jv_n})$. Из формулы для $\mathbf{D}\nu_{kv_n}$ вытекает, что

$$\mathbf{D}(\sum_{j\in\bar v_n} \nu_{jv_n}) = \sum_{j\in\bar v_n} \mathbf{D}\nu_{jv_n}.$$

Последняя формула наталкивает на мысль, что величины ν_{jv_n} для $j \in \bar v_n$ являются независимыми.

Гипотеза. *Случайные величины ν_{jv_n} для $j \in \bar v_n$ являются независимыми.*

Если $p_{ij} = \pi_j$ для $i,\ j = \overline{1,N}$, то гипотеза справедлива, что проверяется непосредственно через совместное распределение этих величин. В случае произвольной матрицы $\mathbf{P}$ я пока не нашел совместное распределения этих величин.

Приступим к формулировке предельной теоремы. Введем следующие обозначение:

$$\tilde b_{ki} = \mathbf{D}\nu_{k\{i\}} = \left(2 \cdot {}^t\pi_{\bar v}(I_{\bar v_n \bar v_n} - \mathbf{P}_{\bar v_n \bar v_n})^{-1}\right)_k.$$

Введем также следующие матрицу B и вектор d:

$$B = (b_{ki})_{j,k=\overline{1,N}},\ b_{ki} = \begin{cases} \tilde b_{ki}, & k \neq i, \\ 0, & k = i. \end{cases},\ {}^t d = (d_1, \ldots, d_N).$$

Если $d = B1_{\mathcal{S}}$, то $d_i = \mathbf{D}\xi_{\{i\}}$. Введем вектора $f,\ g \in \mathcal{R}^N$, такие, что $g > 0$, и $f_i = g_i^2$ для $i = \overline{1,N}$. Пусть $d = Bf$. В этом случае $d_i = \mathbf{D}(\sum_{k=1}^n g_i\nu_{ki})$. Подберем вектор g так, чтобы $d = 1_{\mathcal{S}}$. Для этого достаточно положить

$$f = B^{-1}1_{\mathcal{S}},\ g_i = \sqrt{f_i} \text{ для } i = \overline{1,N}. \tag{1.21}$$

Таким образом, при $|v_n| = 1$ дисперсия $d_i = 1$. Поскольку величины ν_{kv_n} являются *точной* оценкой сверху для $q_k(n+1) - q_k(n)$, то возникает гипотеза о справедливости следующей теоремы.

Теорема 1.17. *Определим случайный процесс*

$$w(n) = \sum_{i=1}^N g_i q_i(n),$$

где g_i определяются из 1.21. Последовательность случайных процессов $w(nt)/\sqrt{n}$ сходится при $n \to \infty$ к стандартному винеровскому процессу с отражением вверх в 0.

Для доказательства этой теоремы мне необходимо тщательно изучить диффузионные процессы с отражением. Это несколько затрудняется отсутствием соответствующей литературы.

1.2.4. *Точность оценки величинами* ν_{kv_n} *и* ξ_{v_n}. В заключение приведем численные данные о точности оценки величинами ν_{kv_n} и ξ_{v_n}. Обозначим через l_n минимальную длину очереди в узлах множества $\bar{v}_n$. Нетрудно увидеть, что вероятность того, что ξ_{v_n} больше истинного количества поездок, строго меньше суммы

$$S = \sum_{k=l_n+1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_{v_n} = k\} = \sum_{k=l_n+1}^{\infty} {}^t\pi_{v_n} \mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n} \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}^{k-2} \mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n} 1_{v_n}.$$

Легко проверить, что при $l_n \geqslant 1$, $0 < |v_n| < N$

$$S = {}^t\pi_{v_n} \mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n} \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}^{l_n-1} (I_{\bar{v}_n\bar{v}_n} - \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n})^{-1} \mathbf{P}_{\bar{v}_n v_n} 1_{v_n} = {}^t\pi_{v_n} \mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n} \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}^{l_n-1} 1_{\bar{v}_n} < C(\lambda(\mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}))^{l_n}.$$

Аналогично можно вычислить, что вероятность того, что ν_{kv_n} строго больше $q_k(n+1) - q_k(n)$ меньше $({}^t\pi_{v_n} \mathbf{P}_{v_n\bar{v}_n} \mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}^{l_n-1})_k < C(\lambda(\mathbf{P}_{\bar{v}_n\bar{v}_n}))^{l_n}$.

1.3. **Что осталось сделать.** Остается исследовать случай $V > 1$. Необходимо строго обосновать предложенные предельные теоремы. В частности, необходимо проверить независимость случайных величин ${}_vN_{ij}$ и ${}_vN_{ik}$ для $k \neq j$.

2. Бесконечная инвариантная мера транспортной сети из двух узлов

Пусть у нас есть V автомобилей, которые циркулируют в двух узлах. Все автомобили перемещаются мгновенно. В систему пуассоновским потоком с интенсивностью 1 поступают пассажиры. Пришедший пассажир с вероятностью γ_i оказывается в узле i. Если автомобилей нет, то пассажир встает в очередь. Иначе пассажир берет автомобиль и с вероятностью p_{ij} мгновенно перемещается в угол j. Если в узле j оказывается пассажир, который уже стоял в очереди, он берет автомобиль и едет, куда ему понадобилось и т.д.

Пусть $y_i(t)$ — число пассажиров в узле i в момент t, $v_i(t)$ — число автомобилей в узле i в момент t. Поскольку автомобили перемещаются мгновенно, $y_i(t)v_i(t) = 0$. Нас интересует процесс $(x_1(t), x_2(t)) = (y_1(t) - v_1(t), y_2(t) - v_2(t))$. Состояния этого процесса есть $(n, -V)$, $(-V, n)$, $(-a, -b)$ при $n \geqslant 0$, $a, b > 0$, $a + b = V$. Пусть

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$. Собственный вектор

$$\pi = \begin{pmatrix} \beta/(\alpha+\beta) \\ \alpha/(\alpha+\beta) \end{pmatrix},$$

$\pi^{\mathrm{T}} P = \pi^{\mathrm{T}}$. Если $\gamma \neq \pi$, то имеет место экспоненциальный рост.

Если $\gamma = \pi$, то система является ноль-рекуррентной. Будем изучать этот случай. Обозначим через $L_n(t)$ вероятность того, что в момент t система находится в состоянии $(n, -V)$, а через $R_n(t)$ вероятность того, что система находится в состоянии $(-V, n)$. Также, обозначим через $C_{a,b}(t)$ вероятность того, что $a, b > 0$, $a+b = V$. Тогда на $L_n(t)$ и $R_n(t)$ выполнены дифференциальные уравнения Колмогорова. Выпишем их при $n > 0$:

$$L'_n = \pi_0 L_{n-1} + \sum_{k \geqslant 1} \pi_1 p_{10} L_{n+k} p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \pi_1 p_{11}) L_n,$$

$$R'_n = \pi_1 R_{n-1} + \sum_{k \geqslant 1} \pi_0 p_{01} R_{n+k} p_{11}^{k-1} p_{10} - (1 - \pi_0 p_{00}) R_n.$$

Уравнения при $n = 0$ зависят от V. Если $V = 1$, то

$$L'_0 = \sum_{k \geqslant 1} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \pi_1 p_{11}) L_0 + \sum_{k \geqslant 0} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k,$$

$$R'_0 = \sum_{k \geqslant 0} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^k - (1 - \pi_0 p_{00}) R_0 + \sum_{k \geqslant 1} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k p_{10}.$$

Если $V > 1$, то

$$L'_0 = \sum_{k \geqslant 1} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \pi_1 p_{11}) L_0 + \pi_0 C_{1,V-1} p_{01},$$

$$R'_0 = \sum_{k \geqslant 1} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k p_{10} - (1 - \pi_0 p_{00}) R_0 + \pi_1 p_{10} C_{V-1,1}.$$

Если $V = 2$, то имеется только одна переменная $C_{1,1}$. Она удовлетворяет уравнению

$$C'_{1,1} = \sum_{k \geqslant 0} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^k - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) C_{1,1} + \sum_{k \geqslant 0} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k.$$

Если $V > 2$, то

$$C'_{1,V-1} = \sum_{k \geqslant 0} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^k - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) C_{1,V-1} + \pi_0 p_{01} C_{2,V-2},$$

$$C'_{a,b} = \pi_1 p_{10} C_{a-1,b+1} - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) C_{a,b} + \pi_0 p_{01} C_{a+1,b-1}, \text{ при } 1 < a < V-1,$$

$$C'_{V-1,1} = \pi_1 p_{10} C_{V-2,2} - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) C_{V-1,1} + \sum_{k \geqslant 0} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k.$$

Поскольку система возвратна и неприводима, согласно [3] у этой системы дифференциальных уравнений существует единственное (с точностью до множителя) неотрицательное решение. Оно задается формулами

$$L_i^* = \alpha, R_i^* = \beta, C_{a,b} = 1. \tag{2.1}$$

В самом деле, при $n > 0$

$$L'_n = 0 = \pi_0\alpha + \alpha\sum_{k\geqslant 1}\pi_1 p_{10} p_{00}^{k-1} p_{01} - (1-\pi_1 p_{11})\alpha = (*),$$

$$R'_n = 0 = \pi_1\beta + \beta\sum_{k\geqslant 1}\pi_0 p_{01} p_{11}^{k-1} p_{10} - (1-\pi_0 p_{00})\beta = (**).$$

Воспользуемся тождествами

$$\pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} = \pi_0,$$

$$\pi_1 p_{10} + \pi_1 p_{11} = \pi_1,$$

Действительно,

$$\sum_{k\geqslant 1}\pi_1 p_{10} p_{00}^{k-1} p_{01} = \sum_{k\geqslant 1}(\pi_0 - \pi_0 p_{00}) p_{00}^{k-1} p_{01} = \pi_0 p_{01},$$

$$\sum_{k\geqslant 1}\pi_0 p_{01} p_{11}^{k-1} p_{10} = \sum_{k\geqslant 1}(\pi_1 - \pi_1 p_{11}) p_{11}^{k-1} p_{10} = \pi_1 p_{10}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}(*) = \alpha(\pi_0 + \pi_0 p_{01} - 1 + \pi_1 p_{11}) &= \alpha(\pi_0 + \pi_0 p_{01} - 1 + \pi_1 - \pi_0 p_{01})\\ &= \alpha(\pi_0 + \pi_1 - 1) = 0,\\ (**) = \beta(\pi_1 + \pi_1 p_{10} - 1 + \pi_0 p_{00}) &= \beta(\pi_1 + \pi_1 p_{10} - 1 + \pi_0 - \pi_1 p_{10})\\ &= \beta(\pi_1 + \pi_0 - 1) = 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим случай $V > 2$.

$$L'_0 = 0 = \alpha\sum_{k\geqslant 1}\pi_1 p_{10} p_{00}^{k-1} p_{01} - (1-\pi_1 p_{11})\alpha + \pi_0 p_{01} =$$

$$= \alpha\pi_0 p_{01} - \alpha + \alpha\pi_1 - \alpha\pi_0 p_{01} + \pi_0 p_{01} = -\alpha + \alpha\pi_1 + \pi_0\alpha,$$

$$R'_0 = 0 = \beta\sum_{k\geqslant 1}\pi_0 p_{01} p_{11}^{k} p_{10} - (1-\pi_0 p_{00})\beta + \pi_1 p_{10} =$$

$$= \beta\pi_1 p_{10} - \beta + \beta\pi_0 - \beta\pi_1 p_{10} + \pi_1 p_{10} = -\beta + \beta\pi_0 + \pi_1\beta.$$

Остается

$$C'_{1,V-1} = 0 = \alpha \sum_{k\geqslant 0} \pi_1 p_{10} p_{00}^k - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) + \pi_0 p_{01} =$$
$$= \alpha\pi_0 - \pi_1\beta = \alpha\beta/(\alpha+\beta) - \alpha\beta/(\alpha+\beta) = 0$$
$$C'_{a,b} = 0 = \pi_1 p_{10} - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) + \pi_0 p_{01}, \text{ при } 1 < a < V-1,$$
$$C'_{V-1,1} = 0 = \pi_1 p_{10} - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) + \beta \sum_{k\geqslant 0} \pi_0 p_{01} p_{11}^k =$$
$$= -\pi_0\alpha + \beta\pi_1 = -\beta\alpha/(\alpha+\beta) + \beta\alpha/(\alpha+\beta).$$

Случаи $V = 1, 2$ рассматриваются аналогично.

Из того же источника [3] получаем следующую теорему.

Теорема 2.1. *При любом начальном условии отношение среднего числа попаданий в состояние $(n, -V)$ к среднему числу попаданий в состояние $(-V, k)$ сходится к α/β, а отношение среднего числа попаданий в $(-a, -b)$ к среднему числу попаданий в $(n, -V)$ сходится к $1/\alpha$ при $t \to \infty$ и при любых $n \geqslant 0$, $a, b > 0$, $a + b = V \geqslant 1$.*

3. Условия эргодичности сети из двух узлов с нетерпеливыми серверами

Модифицируем систему из предыдущего раздела. Предположим, что вектор γ необязательно равен вектору π, и кроме того, предположим, что если все машины скапливаются в одном узле, то с дополнительной интенсивностью ζ одна из машин срывается с места. По-прежнему, будем обозначать через $L_n(t)$ вероятность того, что в момент t система находится в состоянии $(n, -V)$, причем $n \geqslant 0$, а через $R_n(t)$ соответствующую вероятность пребывания в состоянии $(-V, n)$. При $V > 1$

Тогда на $L_n(t)$ и $R_n(t)$ выполнены дифференциальные уравнения Колмогорова. Выпишем их при $n > 0$:

$$L'_n = \gamma_0 L_{n-1} + \sum_{k\geqslant 1} (\gamma_1 + \zeta) p_{10} L_{n+k} p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \gamma_1 p_{11} + \zeta p_{10}) L_n,$$
$$R'_n = \gamma_1 R_{n-1} + \sum_{k\geqslant 1} (\gamma_0 + \zeta) p_{01} R_{n+k} p_{11}^{k-1} p_{10} - (1 - \gamma_0 p_{00} + \zeta p_{10}) R_n.$$

Теорема 3.1 (достаточное условие эргодичности)**.** *Предположим, что выполнены неравенства*

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1 + \zeta} < \frac{p_{10}}{p_{01}} < \frac{\gamma_0 + \zeta}{\gamma_1}$$

Тогда существует единственное инвариантное распределение, к которому имеется сходимость.

Доказательство. Построим семейство множеств, инвариантных относительно этой системы. Это семейство множеств

$$X_a = \{(L_n, C_{a,b}, R_n) \mid C_{a,b} \leqslant 1, L_n \leqslant a^n, R_n \leqslant a^n\}.$$

Заметим, что для проверки инвариантности этого множества достаточно уравнений на L_n и R_n при $n > 1$. Проверим, что если $L_n(0) \leqslant a^n$, то и при всех t выполнено $L_n(t) \leqslant a^n$. Действительно, предположим, что в какой-то момент оказалось $L_n(t^*) = a^n$, а до этого при всех $n > 0$ и при всех $t > 0$ выполнялось $L_n(t) < a^n$. Тогда

$$\dot{L}_n \leqslant a^n \left(\frac{\gamma_0}{a} + \sum_{k\geqslant 1}(\gamma_1 + \zeta)p_{10}a^k p_{00}^{k-1}p_{01} - (1 - \gamma_1 p_{11} + \zeta p_{10})\right) = a^n f(a)$$

Просуммировав сумму мы получаем в явном виде

$$f(a) = \frac{\gamma_0}{a} + (\gamma_1 + \zeta)p_{10}\frac{a}{1 - ap_{00}}p_{01} - (1 - \gamma_1 p_{11} + \zeta p_{10})$$

Легко проверить, что

$$f(1) = \gamma_0 + (\gamma_1 + \zeta)p_{10} - 1 + \gamma_1 p_{11} - \zeta p_{10} = 0.$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{1 - \alpha a}\right)' = \frac{1}{(1 - \alpha a)^2},$$

мы получаем

$$f'(1) = -\gamma_0 + (\gamma_1 + \zeta)p_{10}\frac{1}{(1 - p_{00})^2}p_{01}.$$

Поскольку $1 - p_{00} = p_{01}$, мы можем упростить это выражение до

$$f'(1) = -\gamma_0 + (\gamma_1 + \zeta)\frac{p_{10}}{p_{01}}.$$

Теперь заметим, что при a достаточно близких к 1 в силу формулы Тейлора

$$f(a) = f(1) + f'(1)(a - 1) + o(a - 1) = f'(1)(a - 1) + o(a - 1)$$

при $a < 1$ знак $f(a)$ противоположен знаку $f'(1)$. Поэтому в малой окрестности a из того, что $f'(1) > 0$ следует, что $f(a) < 0$ при $a < 1$. Поэтому, если $f'(1) > 0$, то $\dot{L}_n < 0$ при всех $n \geqslant 1$.

Остается заметить, что условие $f'(1) > 0$ можно сформулировать в виде

$$\frac{p_{10}}{p_{01}} > \frac{\gamma_0}{\gamma_1 + \zeta}.$$

Заметим, что при замене 0 на 1 и 1 на 0 мы получим условие инвариантности области $R_n \leqslant a^n$, а именно

$$\frac{p_{01}}{p_{10}} > \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \zeta}.$$

Пара этих условий эквивалентна неравенствам, приведенным в условии теоремы.

Теперь теорема следует из теоремы 5.1 основного текста диссертации. □

Из этой теоремы следует интересное наблюдение. Предположим, что $\gamma = \pi$. Тогда, учитывая, что $p_{01} = \alpha$, $p_{10} = \beta$, мы получаем следующее условие эргодичности:

$$\frac{\beta}{\alpha + \zeta(\alpha + \beta)} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta + \zeta(\alpha + \beta)}{\alpha}$$

Легко видеть, что при любом $\zeta > 0$ неравенства верны, а следовательно, система эргодична, т.е. обладает единственным стационарным распределением. Этот результат любопытен тем, что при $\zeta = 0$ система уже не является эргодичной, как мы это видели в предыдущем разделе. Таким образом, добавление сколь угодно малого нетерпения автомобилям делает систему эргодичной.

4. Бесконечная инвариантная мера транспортной сети из трех узлов

Пусть у нас есть V автомобилей, которые циркулируют в 3 узлах. Все автомобили перемещаются мгновенно. В систему пуассоновским потоком с интенсивностью 1 поступают пассажиры. Пришедший пассажир с вероятностью γ_i оказывается в узле i. Если автомобилей нет, то пассажир встает в очередь. Иначе пассажир берет автомобиль и с вероятностью p_{ij} мгновенно перемещается в угол j. Если в узле j оказывается пассажир, который уже стоял в очереди, он берет автомобиль и едет, куда ему понадобилось и т.д.

Пусть $y_i(t)$ — число пассажиров в узле i в момент t, $v_i(t)$ — число автомобилей в узле i в момент t. Поскольку автомобили перемещаются мгновенно, $y_i(t)v_i(t) = 0$. Нас интересует процесс $(x_0(t), x_1(t), x_2(t)) = (y_0(t) - v_0(t), y_1(t) - v_1(t), y_2(t) - v_2(t))$. Вначале рассмотрим случай $V = 1$. Тогда все состояния системы суть $(-1, i, j)$, $(i, -1, j)$, $(i, j, -1)$, где $i, j \geqslant 0$. Обозначим через $L_{x_0,x_1,x_2}(t)$ вероятность того, что система находится в состоянии (x_1, x_2, x_3) в момент t. Ради упрощения выкладок будем считать, что $p_{ij} = \pi_j$ при всех i. Тогда легко видеть, что выполнены следующие уравнения при $i, j > 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{-1,i,j} = \sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k+l>0}} \gamma_0 C_{k+l}^k \pi_1^k \pi_2^l L_{-1,i+k,j+l}\pi_0 + \\
+ \gamma_1 L_{-1,i-1,j} + \gamma_2 L_{-1,i,j-1} - (\gamma_0(1-\pi_0) + \gamma_1 + \gamma_2) L_{-1,i,j} \text{ при } i,j>0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{-1,0,i} = \sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k+l>0}} \gamma_0 C_{k+l}^k \pi_1^k \pi_2^l L_{-1,k,i+l}\pi_0 + \\
+ \sum_{k,l\geqslant 0} \gamma_1 C_{k+l}^k \pi_0^k \pi_2^l L_{k,-1,i+l}\pi_0 + \\
+ \gamma_2 L_{-1,0,i-1} - (\gamma_0(1-\pi_0) + \gamma_1 + \gamma_2) L_{-1,0,i} \text{ при } i>0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{-1,0,0} = \sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k+l>0}} \gamma_0 C_{k+l}^k \pi_1^k \pi_2^l L_{-1,k,l}\pi_0 + \\
+ \sum_{k,l\geqslant 0} \gamma_1 C_{k+l}^k \pi_0^k \pi_2^l L_{k,-1,l}\pi_0 + \\
+ \sum_{k,l\geqslant 0} \gamma_2 C_{k+l}^k \pi_0^k \pi_1^l L_{k,l,-1}\pi_0 + \\
- (\gamma_0(1-\pi_0) + \gamma_1 + \gamma_2) L_{-1,0,0}.
\end{aligned}$$

Для удобства записи введем операторы

$$P_1(i, \{v_1, \ldots, v_n\}, r) = \sum_{\substack{k_1,\ldots k_n\geqslant 0\\ k_1+\ldots+k_n>0}} \gamma_i \frac{k_1! \times \ldots \times k_n!}{(k_1+\ldots+k_n)!} \left(\prod_{v\in v_n} \pi_v^{k_v} \theta_v^{k_v}\right)\pi_0,$$

$$P_0(i, \{v_1, \ldots, v_n\}, r) = \sum_{k_1,\ldots k_n\geqslant 0} \gamma_i \frac{k_1! \times \ldots \times k_n!}{(k_1+\ldots+k_n)!} \left(\prod_{v\in v_n} \pi_v^{k_v} \theta_v^{k_v}\right)\pi_0,$$

где по определению $0! = 1$, а θ_v — сдвиг на 1 координаты v у $L_{x_1,\ldots,x_n}$:

$$\theta_v L_{x_1,\ldots,x_v,\ldots x_n} = L_{x_1,\ldots,x_v+1,\ldots,x_n}.$$

С использованием этих обозначений можно переписать нашу систему дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{-1,0,0} &= P_1(0,\{1,2\},0)L_{-1,0,0} + P_0(1,\{0,2\},0)L_{0,-1,0} + \\
&+ P_0(2,\{0,2\},0)L_{0,0,-1} - (\gamma_0(1-\pi_0)+\gamma_1+\gamma_2)L_{-1,0,0},\\
\dot{L}_{-1,0,i} &= P_1(0,\{1,2\},0)L_{-1,0,i} + P_0(1,\{0,2\},0)L_{0,-1,i} + \\
&+ \gamma_2 L_{-1,0,i-1} - (\gamma_0(1-\pi_0)+\gamma_1+\gamma_2)L_{-1,0,i} \text{ при } i>0,\\
\dot{L}_{-1,i,j} &= P_1(0,\{1,2\},0)L_{-1,i,j} + \gamma_1 L_{-1,i-1,j} + \\
&+ \gamma_2 L_{-1,i,j-1} - (\gamma_0(1-\pi_0)+\gamma_1+\gamma_2)L_{-1,i,j}, \text{ при } i,j>0.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$P_1(i, \{v_1, \ldots, v_n\}, r) + \gamma_0 \pi_r = P_0(i, \{v_1, \ldots, v_n\}, r)$$

Теперь заметим, что если $L_{x_0, x_1, x_2} = L^*$, то

$$P_0(i, \{v_1, \ldots, v_n\}, r) L_{x_0, x_1, x_2} = \frac{\gamma_i \pi_r}{1 - \pi_{\{v_1, \ldots, v_n\}}} L^*,$$

где по определению

$$\pi_{\{v_1, \ldots, v_n\}} = \sum_{v \in \{v_1, \ldots, v_n\}} \pi_v.$$

Теперь легко проверить, что если мы положим $L^*_{-1,i,j} = \pi_0$, $L^*_{i,-1,j} = \pi_1$, $L^*_{i,j,-1} = \pi_2$, то

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{-1,0,0} &= \gamma_0 \pi_0 + \gamma_1 \pi_0 + \gamma_2 \pi_0 - (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2) \pi_0 = 0, \\
\dot{L}_{-1,0,i} &= \gamma_0 \pi_0 + \gamma_1 \pi_0 + \gamma_2 \pi_0 - (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2) \pi_0 = 0, \\
\dot{L}_{-1,i,j} &= \gamma_0 \pi_0 + \gamma_1 \pi_0 + \gamma_2 \pi_0 - (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2) \pi_0 = 0,
\end{aligned}$$

Заметим, что таким образом мы установили нашли бесконечную инвариантную меру сети из 3 узлов и одного автомобиля. Найдем теперь бесконечную инвариантную меру сети из 3 узлов и 2-х двух автомобилей.

Все дифференциальные уравнения получаются с помощью перестановки индексов из следующих:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{-2,0,0} &= P_1(0,\{1,2\},0)L_{-2,0,0} + P_0(1,\{2\},0)L_{-1,-1,0}+\\
&\quad + P_0(2,\{1\},0)L_{-1,0,-1} - (\gamma_0(1-\pi_0)+\gamma_1+\gamma_2)L_{-2,0,0},\\
\dot{L}_{-2,0,i} &= P_1(0,\{1,2\},0)L_{-2,0,i} + P_0(1,\{2\},0)L_{-1,-1,i}+\\
&\quad \gamma_2 L_{-2,0,i-1} - (\gamma_0(1-\pi_0)+\gamma_1+\gamma_2)L_{-2,0,i} \text{ при } i>0,\\
\dot{L}_{-2,i,j} &= P_1(0,\{1,2\},0)L_{-2,i,j} + \gamma_1 L_{-2,i-1,j}+\\
&\quad \gamma_2 L_{-2,i,j-1} - (\gamma_0(1-\pi_0)+\gamma_1+\gamma_2)L_{-2,i,j} \text{ при } i,j>0,\\
\dot{L}_{-1,-1,0} &= P_1(0,\{2\},0)L_{-1,-1,0} + P_1(1,\{2\},1)L_{-1,-1,0}+\\
&\quad + P_0(0,\{1,2\},1)L_{-2,0,0} + P_0(1,\{0,2\},0)L_{0,-2,0}+\\
&\quad + P_0(2,\{0\},0)L_{0,-1,-1} + P_0(2,\{1\},1)L_{-1,0,-1}-\\
&\quad - (\gamma_0(1-\pi_0)+\gamma_1(1-\pi_1)+\gamma_2)L_{-1,-1,0},\\
\dot{L}_{-1,-1,i} &= P_1(0,\{2\},0)L_{-1,-1,i} + P_1(1,\{2\},1)L_{-1,-1,i}+\\
&\quad + P_0(0,\{1,2\},1)L_{-2,0,i} + P_0(1,\{0,2\},0)L_{0,-2,i}+\\
&\quad + \gamma_2 L_{-1,-1,i-1} - (\gamma_0(1-\pi_0)+\gamma_1(1-\pi_1)+\gamma_2)L_{-1,-1,i} \text{ при } i>0.
\end{aligned}$$

Покажем теперь, что независимо от γ имеется бесконечная инвариантная мера, задаваемая формулами:

$$\begin{array}{ll}
L_{-2,i,j} = \pi_0 & L_{-1,-1,i} = \pi_0+\pi_1\\
L_{i,-2,j} = \pi_1 & L_{-1,i,-1} = \pi_0+\pi_2\\
L_{i,j,-2} = \pi_2 & L_{i,-1,-1} = \pi_1+\pi_2.
\end{array}$$

Действительно, при таких значениях L получаем

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{-2,0,0} &= \gamma_0\pi_0+\gamma_1\pi_0+\gamma_2\pi_0-(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2)\pi_0 = 0,\\
L_{-2,0,i} &= \gamma_0\pi_0+\gamma_1\pi_0+\gamma_2\pi_0-(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2)\pi_0 = 0,\\
L_{-2,i,j} &= \gamma_0\pi_0+\gamma_1\pi_0+\gamma_2\pi_0-(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2)\pi_0 = 0,\\
L_{-1,-1,j} &= \gamma_0\pi_0+\gamma_1\pi_1+\gamma_0\pi_1+\gamma_1\pi_0+\\
&\quad + \gamma_2\pi_0+\gamma_2\pi_1-(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2)(\pi_0+\pi_1) = 0,\\
L_{-1,-1,j} &= \gamma_0\pi_0+\gamma_1\pi_1+\gamma_0\pi_1+\gamma_1\pi_0+\\
&\quad + \gamma_2(\pi_0+\pi_1)-(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2)(\pi_0+\pi_1) = 0.
\end{aligned}$$

На самом деле, можно проверить, что верно следующее более общее утверждение.

Теорема 4.1. *Рассмотрим систему из N узлов и V автомобилей. Предположим, что $p_{ij} = \pi_j$ при всех i. Тогда существует бесконечная инвариантная мера, которая задается формулой*

$$L^*_{x_1,\dots,x_n} = \sum_{i:x_i<0} \pi_i.$$

Заметим, что эта инвариантная мера не зависит от γ.

5. Условия эргодичности системы из трех узлов

Любопытно, что прямое применения метода раздела 3 не приводит вообще ни к какому условию эргодичности для системы из трех узлов. Для того, чтобы была понятна задача, выпишем уравнения на систему из 3 узлов и одного автомобиля, который с интенсивностью ζ срывается с места:

$$\begin{aligned}
\dot L_{-1,i,j} = &\sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k+l>0}} (\gamma_0+\zeta) C^k_{k+l} \pi_1^k \pi_2^l L_{-1,i+k,j+l}\pi_0 + \\
&+ \gamma_1 L_{-1,i-1,j} + \gamma_2 L_{-1,i,j-1} - ((\gamma_0+\zeta)(1-\pi_0) + \gamma_1 + \gamma_2) L_{-1,i,j} \text{ при } i,j>0.\\
\dot L_{-1,0,i} = &\sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k+l>0}} (\gamma_0+\zeta) C^k_{k+l} \pi_1^k \pi_2^l L_{-1,k,i+l}\pi_0 + \\
&+ \sum_{k,l\geqslant 0} (\gamma_1+\zeta) C^k_{k+l} \pi_0^k \pi_2^l L_{k,-1,i+l}\pi_0 + \\
&+ \gamma_2 L_{-1,0,i-1} - ((\gamma_0+\zeta)(1-\pi_0) + \gamma_1 + \gamma_2) L_{-1,0,i} \text{ при } i>0.\\
\dot L_{-1,0,0} = &\sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k+l>0}} (\gamma_0+\zeta) C^k_{k+l} \pi_1^k \pi_2^l L_{-1,k,l}\pi_0 + \\
&+ \sum_{k,l\geqslant 0} (\gamma_1+\zeta) C^k_{k+l} \pi_0^k \pi_2^l L_{k,-1,l}\pi_0 + \\
&+ \sum_{k,l\geqslant 0} (\gamma_2+\zeta) C^k_{k+l} \pi_0^k \pi_1^l L_{k,l,-1}\pi_0 + \\
&- ((\gamma_0+\zeta)(1-\pi_0) + \gamma_1 + \gamma_2) L_{-1,0,0}.
\end{aligned}$$

Заметим, что если $\gamma_i = \pi_i$, то сумма коэффициентов в уравнении на $\dot L_{-1,i,j}$ равна 0, в то время как сумма коэффициентов на $L_{-1,0,i}$ уже не равна нулю, а строго больше его. Собственно, именно это и является главным препятствием для построения компактного инвариантного множества.

Список литературы

[1] *L.G. Afanassieva, F. Delcoigne,, G. Fayolle*. On polling systems where servers wait for customers. — Markov Process. Related Fields, vol. 3, №4, pp.527–545, 1997. Statistical mechanics of large networks (Rocquencourt, 1996).

[2] *А.А. Боровков*. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1972.

[3] *В. Феллер*. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Мир, Москва, 1984.

[4] *R.A Horn, C.R. Johnson*. Matrix Analysis. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989. имеется русский перевод: Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* — М. “Мир”, 1989.