Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Хмелёв Дмитрий Викторович

ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ГЛОБАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2001

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Л.Г. Афанасьева
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Б.М. Гуревич доктор физико-математических наук, ст.н.с. Н.Д. Введенская
Ведущая организация:	Московский государственный институт электроники и математики (Технический университет)

Защита диссертации состоится "_____" декабря 2001 г. в 16 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу 119899, ГСП, Москва, Воробьёвы горы, МГУ, ауд.16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "_____"_______________ 2001 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.85 в МГУ,
профессор

Т. П. Лукашенко

Актуальность темы. Теория массового обслуживания — богатая и интенсивно развивающаяся область математического знания. Начиная с работ А.К. Эрланга[1], ей была присуща очевидная практическая направленность, что приводило к появлению множества естественных и интересных вероятностных задач.

Усложнение применяемых на практике технологических систем, и, прежде всего, широкое распространение систем обработки и передачи данных, способствовало формированию новой области теории массового обслуживания — теории сетей обслуживания. Из разнообразных сетей обслуживания в отдельную группу выделяют системы поллинга, которые состоят из конечного числа станций, посещаемых одним или несколькими обслуживающими приборами. В настоящее время теория поллинговых систем активно развивается, о чём свидетельствует обширная отечественная и зарубежная литература.

К типу поллинговых можно отнести системы, в которых обслуживание состоит в перевозке требований, а перемещение приборов возможно только при наличии требования. Такие модели естественно возникают при описании транспортных сетей.

Вплоть до недавнего времени арсенал методов теории массового обслуживания не позволял эффективно подходить к изучению подобных моделей. Обычно можно легко задать цепь Маркова, которая описывает изучаемую систему. Однако, пространство состояний марковской цепи оказывается существенно многомерным и выписать стационарное распределение за редкими исключениями не удаётся. Например, Р.Л. Добрушин придерживался той точки зрения, что явные формулы для стационарных распределений в «общем случае» получить нельзя. С точки зрения вычисления операционных характеристик системы необходимо знать именно явную формулу для стационарного распределения, из которой хорошо видно, как параметры системы влияют на целевую функцию. В связи с этим возникает вопрос о нахождении асимптотических формул для стационарного распределения в многочисленных предельных случаях: для большой или малой загрузки, нулевых времён перемещения (в частности, классические формулы Б.В. Гнеденко в задаче о станках могут рассматриваться как предельный случай ситуации, когда время перемещения работников между станками равно нулю) и пр.

В настоящей диссертации асимптотические формулы изучаются в предельном случае, отвечающем большой размерности системы массового обслуживания (большая размерность чаще всего связана с большим числом приборов или очередей к этим приборам, каждую из которых надо описывать отдельной координатой). Такую задачу можно решать с помощью так называемого метода среднего поля, в котором

[1] *E. Brockmeyer, H.L. Halstrøm, A. Jensen*. The life and works of A. K. Erlang. // Trans. Danish Acad. Tech. Sci., vol. 1948, №2, pp.277, 1948.

пространство состояний сети выбирается таким образом, чтобы при увеличении числа компонент сети поведение системы становилось все более и более детерминированным, а в пределе её состояние описывалось бы системой обыкновенных дифференциальных уравнений (которые могут быть и нелинейными).

Другой, вероятностный, взгляд на проблему состоит в том, что при наличии достаточно сильной симметрии у системы, когда число компонент увеличивается, зависимость их друг от друга ослабевает и, в конце концов, все компоненты начинают эволюционировать независимо друг от друга. Эта эволюция описывается опять-таки нелинейными дифференциальными уравнениями, неподвижная точка которых и представляет собой желаемое стационарное состояние каждой из компонент.

Согласно обзору[2], этот метод в «интуитивной» форме известен математикам и инженерам довольно давно — с 60-х годов XX века, однако, вопрос о строгом обосновании всех описанных шагов сталкивается с большими трудностями. Авторы обзора[2] называют гипотезой Р.Л. Добрушина утверждение о том, что указанный метод действительно можно строго обосновать математически в большинстве систем. К этой гипотезе близка несколько более частная гипотеза А.А. Боровкова о предельном поведении замкнутой полностью симметричной сети Джексона с общим временем обслуживания заявок.

Одним из самых сложных вопросов является вопрос о сходимости решений нелинейной системы дифференциальных уравнений к неподвижной точке, необходимый для обоснования сходимости стационарных распределений к распределению, сосредоточенному в неподвижной точке. В частности, после работы[3] Ф.И. Карпелевича и А.Н. Рыбко именно доказательство сходимости решений к неподвижной точке нелинейной системы уравнений осталось последним препятствием в доказательстве гипотезы А.А. Боровкова.

Такого рода задача называется задачей о *глобальной асимптотической устойчивости.* Заметим, что хорошо развита лишь теория локальной устойчивости, то есть, устойчивости в окрестности неподвижной точки, в то время как в случае глобальной асимптотической устойчивости исследователь может надеяться лишь на собственную интуицию, которая поможет ему построить *функцию Ляпунова* (называемую иногда *пробной функцией*). Одним из немногих свойств нелинейной системы дифференциальных уравнений, которые позволяют исследовать её сходимость к неподвижной точке, является покоординатная монотонность решений по начальному условию. Такое свойство действительно имеется для целого класса систем возникающих в данном контексте, хотя и требует определённого искусства в выборе системы координат.

---

[2] *F.I. Karpelevich, E.A. Pechersky, Yu.M. Suhov*. Dobrushin's approach to queueing network theory. // J. Appl. Math. Stochastic Anal., vol. 9, №4, pp.373–397, 1996.

[3] *Ф.И. Карпелевич, А.Н. Рыбко*. Асимптотическое поведение симметричной замкнутой сети массового обслуживания в термодинамическом пределе. // Пробл. передачи информации, т. 36, №2, с.69–95, 2000.

Тем не менее, существует значительное число практически и теоретически важных моделей, для которых свойство монотонности не выполняется и вопрос о глобальной устойчивости не может быть решён в рамках существующих методов. К ним относятся системы с законом сохранения типа суммы координат, естественным образом возникающие в приложениях (например, в теории транспортных сетей). Это делает проблемы разработки новых подходов для исследования глобальной устойчивости предельных систем уравнений весьма актуальной.

Цель работы. — Доказательство предельных теорем типа закона больших чисел для поллинговых моделей, описывающих транспортные сети;

— разработка методов исследования глобальной асимптотической устойчивости для предельных систем дифференциальных уравнений, не обладающих свойством монотонности;

— доказательство на этой основе сходимости стационарных распределений к неподвижной точке нелинейной системы и отыскание этой точки;

— применение разработанных методов к исследованию эргодичности цепей Маркова;

— анализ системы с бесконечным числом узлов как случайного процесса с локальным взаимодействием.

Методы исследования. В работе используются методы теории марковских процессов, методы функционального анализа, теория неотрицательных матриц и аппарат теории обычных дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

— Для стохастических случайных процессов, описывающих транспортную сеть, установлена сходимость по вероятности к предельной системе, которая описывается нелинейными дифференциальными уравнениями.

— Доказана теорема о глобальной устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений (в конечном и счётномерном случаях) в предположении, что элементы матрицы Якоби неотрицательны. С помощью этой теоремы получена сходимость стационарных распределений к неподвижной точке системы уравнений для новых моделей и целого ряда моделей, рассматривавшихся ранее другими авторами.

— Найдены инвариантные меры для процесса с локальным взаимодействием, возникающего при рассмотрении системы с бесконечным числом узлов, а также доказана единственность феллеровского процесса с заданным инфинитезимальным оператором.

— Предложен новый достаточный признак эргодичности цепи Маркова, основанный на существовании инвариантного компактного множества.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы специалистами в области теории вероятности, теории массового обслуживания, теории динамических систем и теории операций.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Большом научно-исследовательском семинаре кафедры теории вероятностей (руководитель — член-корреспондент РАН А.Н.Ширяев) (2000), на Первых Колмогоровских чтениях в МГУ (1999), Ломоносовских чтениях в МГУ (1999), а также на семинарах по теории вероятностей и статистической физике (руководители — проф. Б.М. Гуревич и проф. В.И. Оселедец), по динамическим системам (руководитель — проф. Я.Г. Синай), на семинаре под руководством В.В. Веденяпина в ИПМ РАН.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в восьми работах, список которых приведён в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения и трёх глав. Текст диссертации изложен на 137 страницах. Работа содержит 8 рисунков и 76 наименований библиографии.

Содержание работы

Введение. Во введении приводится краткий обзор истории исследований в теории массового обслуживания и формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1. Первая глава диссертации посвящена исследованию конечномерных моделей.

Обозначим n-мерное вещественное пространство через $\mathbb{R}^n$. Для всякого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ определим норму $\|\cdot\|$ по правилу $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, где $|\cdot|$ означает абсолютную величину числа. Под $\mathbb{R}^n_+$ понимается множество покоординатно неотрицательных векторов $x \in \mathbb{R}^n$. Под $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ подразумевается тождественное отображение: $Ix = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Введём линейное подпространство $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\}$. Линейное отображение A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовём *марковским*, если транспонированная матрица этого отображения является стохастической или $A\mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n_+$, $(1, \ldots, 1)A = (1, \ldots, 1)$. Пусть $A = aB$ — отображение, пропорциональное марковскому отображению B с коэффициентом пропорциональности $a > 0$. Для такого отображения A определим *коэффициент эргодичности* $k(A)$ по правилу $k(A) = \|A\| - \|A\|_L$. Здесь

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_i \|Ae_i\|,$$

$$\|A\|_L = \sup_{x \in L, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_{i,j} \|A(e_i - e_j)\|/2,$$

где $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, а $\{e_k\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $\|B\| = 1$, $k(B) = 1 - \|B\|_L$ и $k(A) = ak(B)$. Для стохастических матриц B^{T} коэффициент эргодичности ввёл Р.Л. Добрушин[4, 5] и его определение совпадает с данным.

В разделе 1 исследуется автономная конечномерная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{$*$}$$

обладающая следующими свойствами

1) векторное поле $f(x)$ дифференцируемо по x и матрица Якоби

$$J(x) = \partial f/\partial x = (\partial f_i/\partial x_j)$$

непрерывно зависит от x. Эти условия обеспечивают при $t \geqslant 0$ существование и единственность решения $x(t, g)$ системы $(*)$ с начальным условием $x(0, g) = g$. Кроме того, $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо по g.

2) Существует множество X, инвариантное относительно динамической системы $(*)$, и, кроме того, X — компактное выпуклое подмножество аффинного многообразия $L + c$ при некотором $c \in \mathbb{R}^n$.

3) Система $(*)$ обладает первым интегралом $\sum_{i=1}^n x_i$, т.е. $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 0$. Отсюда следует, что $J(x)L \subset L$ или, что то же самое, сумма строк матрицы $J(x)$ равна нулю. Кроме того, недиагональные элементы матрицы $J(x)$ неотрицательны при всех $x \in X$.

Заметим, что третье условие носит вероятностный характер и означает, что матрица $J(x)$ является матрицей интенсивностей переходов некоторого марковского процесса[6, 7].

Теорема 1. *Если выполнены условия 1)–3), то для любых начальных условий g^0, $g^1 \in X$ при всяком $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leqslant \|g^1 - g^0\|,$$

т.е. функция $x(t, \cdot) : X \to X$ не увеличивает расстояние между любыми двумя точками.

Теперь предположим, что существует линейное отображение $B \geqslant 0$, удовлетворяющее при некотором $\zeta \geqslant 0$ следующим условиям

(a) при всех $x \in X$ верно неравенство $J(x) + \zeta I \geqslant B$, где I является единичной матрицей;

[4] *Р.Л. Добрушин*. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I. // Теория вероятностей и её приложения, т. 1, №1, с.72–89, 1956.

[5] *Р.Л. Добрушин*. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II. // Теория вероятностей и её приложения, т. 1, №4, с.365–425, 1956.

[6] *И.И. Гихман, А.В. Скороход*. Теория случайных процессов. Наука, Москва, 1971.

[7] *J.R. Norris*. Markov chains. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

(б) B — пропорционально марковскому отображению и при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнено $k((I+B)^{n_0}) > 0$.

Требование (б) является существенным и предохраняет от различных вырождений.

Теорема 2. *В условиях 1)–3) и (а)–(б) при всяком $t > 0$ существует такое $q = q(t) < 1$, что для любых начальных условий g^0, $g^1 \in X$ выполнено неравенство*

$$\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leqslant q\|g^1 - g^0\|,$$

т.е. отображение $x(t, \cdot)\colon X \to X$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $q = q(t) < 1$.

Дальнейшие обобщения этих теорем приведены в разделе 1 главы 1.

Рассмотренные нелинейные дифференциальные уравнения естественно появляются при применении метода среднего поля к некоторым сложным моделям теории массового обслуживания.

В разделе 2 главы 1 изучается сеть из N узлов и rN обслуживающих приборов (автомобилей). В каждый узел в сооответствии с пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(t)$ поступают заявки (пассажиры). Пуассоновские потоки заявок в разные узлы независимы. Заявка, попавшая в пустой узел, покидает систему. Если заявка попадает в узел с приборами, то случайно и равновероятно выбирается один из приборов, который забирает заявку и перемещается экспоненциально распределенное время. Движение прибора моделируется с помощью введения дополнительного виртуального узла: когда прибор начинает перемещаться, он попадает в виртуальный узел, где находится экспоненциально распределенное время со средним значением 1, а затем перемещается в узел, равновероятно выбираемый из всех N узлов. Если число приборов в выбранном узле равно m, прибор ждет следующей попытки в виртуальном узле экспоненциально распределенное время со средним 1 и т.д. Таким образом, в каждом узле (кроме виртуального) может находиться от 0 до m приборов.

Пусть n_k — число узлов, количество приборов в которых равно k, $f_k = n_k/N$ — доля этих узлов, W — количество приборов, находящихся в виртуальном узле, а $V = W/N$. В технических целях удобно перейти от f_k к накопленным долям $u_k = \sum_{i=k}^{m} f_i$.

Все случайные интервалы времени и пуассоновские потоки предполагаются независимыми в совокупности.

Из наших предположений следует, что эволюция системы описывается некоторым марковским процессом $U_N(t)$, для которого можно выбрать пространство состояний X_N содержащее все такие вектора $u = (u_1, \ldots, u_m, V)^{\mathrm{T}}$ из $(1/N)\mathbb{Z}_+^{m+1}$, что выполнены неравенства

$$1 = u_0 \geqslant u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_m \geqslant 0,\ V \geqslant 0 \text{ и } V + u_1 + \ldots + u_m = r. \qquad (\diamond)$$

Кроме того, из наших предположений следует, что производящий оператор $A_N(t)$ процесса $U_N(t)$, который действует на функции над X_N, задается следующим образом

$$A_t^N f(u) = N\lambda(t)\sum_{k=1}^{m-1}(u_k - u_{k+1})[f(u - e_k/N + e_{m+1}/N) - f(u)]+$$
$$+ N\lambda(t)u_m[f(u - e_m/N + e_{m+1}/N) - f(u)]+$$
$$+ NV\sum_{k=1}^{m}(u_{k-1} - u_k)[f(u + e_k/N - e_{m+1}/N) - f(u)],$$

где e_i — вектор, i-тая координата которого равна 1, а остальные координаты равны 0. В силу конечности X_N оператор $A_N(t)$ определяет единственный марковский процесс $U_N(t)$.

Метод среднего поля подсказывает, что в пределе при $N \to \infty$ эволюция u становится детерминированной. Более точно: пусть X означает множество всех векторов $\mathbb{R}^{m+1}$, удовлетворяющих условиям $(\diamond)$. Тогда, если распределение начального состояния $U_N(0)$ сходится к вырожденной мере, сконцентрированной в точке $g \in X$, то распределение $U_N(t)$ сосредотачивается при больших N на траектории $u(t) \in X$, удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f(u, \lambda), \qquad (\diamond\diamond)$$

где

$$f_i(u, \lambda) = \lambda(u_{i+1} - u_i) + V(u_{i-1} - u_i),\ i = 1, \ldots, m-1,\ u_0 = 1,$$
$$f_m(u, \lambda) = -\lambda u_m + V(u_{m-1} - u_m),$$
$$f_{m+1}(u, \lambda) = \lambda u_1 - V(1 - u_m).$$

Система $(\diamond\diamond)$ является нелинейной с квадратичной правой частью. Чтобы строго сформулировать утверждение о сходимости процесса $U_N(t)$ к решению $u(t, g)$ системы $(\diamond\diamond)$ с начальным условием g, определим семейство производящих операторов $T_N = T_N(t)$ по правилу

$$T_N(t)f(g) = \mathbf{E}(f(U_N(t)) \mid U_N(0) = g),\ g \in X_N.$$

Теорема 3. *Для всех $f \in C(X)$, равномерно по t на произвольном отрезке из $\mathbb{R}_+ = \{t \geqslant 0\}$,*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \sup_{g\in X_N} |T_N(s)f(g) - f(u(s, g))| = 0.$$

Доказательство этой теоремы опирается на классические результаты о сходимости марковских процессов, если сходятся их производящие операторы[8].

Обозначим через ε_g дискретную вероятностную меру, сосредоточенную в точке $g \in X$.

[8] *S.N. Ethier, T.G. Kurtz.* Markov processes (Characterization and convergence). John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.

Теорема 4. *Если $U_N(0)$ по вероятности сходится к ε_g, то*

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|U_N(s) - u(s,\tau,g)\| \to 0 \text{ по вероятности при всех } t \geqslant 0.$$

Обозначим через g^* точку $g^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*, V^*)$, которая является стационарным решением системы $(\diamond\diamond)$ т.е., $f(g^*,\lambda) = 0$. Тогда

$$u_k^* = u_k(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^k - \rho^{m+1}}{1-\rho^{m+1}}, & \rho \neq 1 \\ 1 - \dfrac{k}{m+1}, & \rho = 1, \end{cases}$$

при $k = 1, \ldots, m$, $V^* = V(\rho) = \lambda\rho$, где ρ единственным образом определяется из условия на первый интеграл:

$$V(\rho) + u_1(\rho) + \ldots + u_m(\rho) = r.$$

При обозначении $L(\rho) = u_1(\rho) + \ldots + u_m(\rho)$ с учётом $V(\rho) = \lambda\rho$ последнее условие принимает вид

$$L(\rho) + \lambda\rho = r.$$

Если $\lambda(t)$ — постоянна, то процессы $U_N(t)$, образуют семейство однородных цепей Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний, каждая из которых в силу неприводимости обладает единственной инвариантной мерой μ_N.

Реализация изложенной в начале введения программы по поиску асимптотических характеристик систем позволяет доказать следующую теорему, существенно использующую теорему 2.

Теорема 5. *Инвариантные меры μ_N процессов U_N слабо сходятся к дискретной мере, сосредоточенной в g^*.*

Кроме того, в разделе 2 исследуется случай непостоянного $\lambda(t)$.

В разделе 3 показано, как теорему 2 можно применять для доказательства сходимости в модели Н.Д. Введенской, Р.Л. Добрушина и Ф.И. Карпелевича[9] с дополнительным ограничением на длину очереди.

Раздел 4 посвящён техническому результату, который позволяет изучать поведение предельной динамической системы строго «внутри» фазового пространства. Дело в том, что на границе фазового пространства свойства динамической системы могут нарушаться: например, может пропадать равномерное сжатие фазового потока.

В разделе 5 рассматривается задача, которая не поддаётся непосредственному применению теоремы 2, но после замены координат удаётся в некоторых частных случаях показать сходимость. У матрицы Якоби, приведённой в разделе 5, имеется ровно

[9] *Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин, Ф.И. Карпелевич.* Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей — асимптотический подход. // Пробл. передачи информации, т. 32, №1, с.20–34, 1996.

один элемент, который может принимать отрицательные значения. Во многих современных задачах асимптотического анализа возникают системы дифференциальных уравнений с матрицами Якоби ещё более сложной структуры. Возможно, дальнейшее изучение системы раздела 5 позволит найти более общий подход к системам, в которых отсутствует монотонность.

Раздел 6 посвящён обобщению модели раздела 2 в сторону асимметричности. А именно, узлы разбиваются на несколько районов, в каждом из которых маршрутизация равновероятна. Оказывается, что и в этом случае можно найти неподвижную точку, к которой в силу аналога теоремы 5 и сходятся инвариантные меры конечных систем.

Заметим, что все модели, рассмотренные в разделах 2–6, а также освещённые в работах[9, 10, 11, 12] предполагают экспоненциальность распределения времён обслуживания.

В разделе 7 рассмотрена простейшая модель транспортной сети, аналогичная модели раздела 2 с тем усложнением, что время перемещения прибора от одного узла к другому распределено не показательно, а по т.н. гиперэрланговскому закону. Гиперэрланговским законом называют конечную смесь *эрланговских* распределений, а эрланговское распределение, в свою очередь, имеет плотность 0 при $x < 0$ и $\nu^l x^l e^{-\nu x}/(l-1)!$ при $x > 0$, где параметры удовлетворяют условиям $\nu > 0$ и $l \in \mathbb{N}$.

Как известно[13, 14], конечная смесь эрланговских распределений сколь угодно точно в метрике пространства L^1 приближает любое заданное наперёд распределение с конечным средним.

Основной результат раздела 7 состоит в том, что при большом количестве компонент системы распределение приборов по узлам сети зависит лишь от математического ожидания гиперэрланговского распределения, а вид этого распределения такой же, как для экспоненциального случая. То есть распределение числа приборов по узлам описывается теми же формулами, что и в разделе 2.

Глава 2. Вторая глава диссертации посвящена исследованию существенно счётномерных систем. В разделе 1 изучается устойчивость некоторого специального класса

[10] *L.G. Afanassieva, G. Fayolle, S.Yu. Popov*. Models for transportation networks. // J. Math. Sci. (New York), vol. 84, №3, pp.1091–1103, 1997.

[11] *J.B. Martin, Yu.M. Suhov*. Fast Jackson networks. // Ann. Appl. Probab., vol. 9, №3, pp.854–870, 1999.

[12] *V.V. Scherbakov*. Long time dynamics in large closed Jackson networks. // Markov Process. Related Fields, vol. 6, №1, pp.107–119, 2000.

[13] *Н.П. Бусленко, В.В. Калашников, И.Н. Коваленко*. Лекции по теории сложных систем. Советское радио, Москва, 1973.

[14] *S. Asmussen*. Applied probability and queues. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.

счётных систем дифференциальных уравнений на основе усовершенствования подхода, изложенного в разделе 1 первой главы. Различие между конечномерным и счётномерным случаем у систем из рассматриваемого класса аналогично различию между конечными и счётными цепями Маркова. Условие на положительность коэффициента эргодичности некоторой степени матрицы Якоби соответствует условию Дёблина эргодичности цепи Маркова. Хорошо известно, что условие Дёблина весьма ограничительно, и, например, обычный процесс рождения и гибели с существенно счётным пространством состояний ему уже не удовлетворяет. Можно показать, что у всех бесконечных систем дифференциальных уравнений из работ[9, 11, 15, 16] коэффициент эргодичности матрицы Якоби равен 0. Поэтому вводится обобщение коэффициента эргодичности, которое называется коэффициентом эргодичности по направлению.

С использованием коэффициента эргодичности по направлению можно доказывать строгое уменьшение расстояния между образами любых двух начальных условий. Отметим, что в этом случае нельзя пользоваться принципом сжимающих отображений, поскольку коэффициент сжатия зависит от точки и может быть сколь угодно близок к 1. Поэтому мы используем специальные теоремы о неравномерном сжатии.

Следуя общепринятым обозначениям[17] обозначим через l_1 пространство последовательностей $x = (x_0, x_1, \ldots)^{\mathrm{T}}$ с нормой $\|x\| = |x_0| + |x_1| + \ldots$ Мы полагаем x бесконечным столбцом, чтобы подчеркнуть аналогию с конечномерным случаем. Норма $\|\cdot\|$ индуцирует норму, а следовательно, и топологию на ограниченных линейных операторах $A\colon l_1 \to l_1$, $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\|Ax\|/\|x\|$. Окрестность точки $g \in l_1$ обозначим через $U_\varepsilon(g) = \{x \in l_1 \mid \|g - x\| < \varepsilon\}$. Все векторные и матричные неравенства следует понимать как покомпонентные. Под I понимается тождественное преобразование: $Ix = x$ для всех $x \in l_1$.

Линейное отображение $A\colon l_1 \to l_1$ назовём *марковским*, если $Ah \geqslant 0$ при любом $h \geqslant 0$ и $(1, \ldots, 1, \ldots)A = (1, \ldots, 1, \ldots)$. Заметим, что отображение A — марковское, если его транспонированная бесконечная матрица является стохастической.

Введём линейное подпространство $L = \{g \in l_1 \mid g_0 + \ldots = 0\}$. Рассмотрим отображение $A = aB$, где $a > 0$ и B — марковское отображение, $B : l_1 \to l_1$. Определим *коэффициент эргодичности* $k(A, g)$ *отображения* $A\colon l_1 \to l_1$ *по направлению* $g \in l_1 \setminus \{0\}$ по правилу $k(A, g) = \|A\|\|g\| - \|Ag\|$. Здесь

$$\|A\| = \sup_{x\in l_1, \|x\|=1} \|Ax\| = \sup_i \|Ae_i\|,$$

[15]*N.D. Vvedenskaya, Yu.M. Suhov*. Dobrushin's mean-field approximation for a queue with dynamic routing. // Markov Process. Related Fields, vol. 3, №4, pp.493–526, 1997. Statistical mechanics of large networks (Rocquencourt, 1996).

[16]*F.I. Karpelevich, A.N. Rybko*. Thermodynamic limit for the mean field model of simple symmetrical closed queueing network. // Markov Process. Related Fields, vol. 6, №1, pp.89–105, 2000.

[17]*А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин*. Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», Физматгиз, Москва, 1976.

где e_k — вектор, каждая координата которого, кроме k-й равной 1, равна 0. Очевидно, $k(A,g) = ak(B,g)$.

Можно также определить *коэффициент эргодичности* отображения A по правилу $k(A) = \|A\| - \|A\|_L$. Очевидно, что

$$k(A) = \inf_{g \in L \setminus 0} \frac{k(A,g)}{\|g\|} = \|A\| - \sup_{g \in L \setminus 0} \frac{\|Ag\|}{\|g\|},$$

и если $k(A) > 0$, то $k(A,g) > 0$ для всех $g \in L \setminus 0$. Обратное утверждение верно в конечномерном случае, но, вообще говоря, неверно в бесконечномерном случае. Действительно, в конечномерном случае (или в случае компактного оператора A)

$$\inf_{g \in L \setminus 0} \frac{k(A,g)}{\|g\|} = \inf_{g \in L, \|g\|=1} k(A,g) = \inf_{g \in L, \|g\|=1} \|A\| - \|Ag\| = \inf_{g' \in L'} \|A\| - \|g'\|,$$

где $L' = \{g' \mid g' = Ag$ при некотором $g \in L, \|g\| = 1\}$. Множество L' компактно в силу компактности оператора A. Заметим $\|A\| - \|\cdot\|$ — непрерывная функция на L' и она принимает те же значения, что и $k(A,g)$ при $g \in L \setminus 0, \|g\| = 1$, а потому $\|A\| - \|g'\| > 0$ для всякого $g' \in L'$. Поэтому функция $\|A\| - \|\cdot\|$ достигает на L' минимума, и этот минимум, равный $k(A)$, строго больше нуля.

Рассмотрим теперь бесконечномерный случай. Назовём *размахом* ленточной матрицы ограниченного оператора A такое число d, что $a_{ij} = 0$, как только $|i-j| > d$.

Лемма 6. *Пусть B — марковский оператор с размахом d и $A = aB$. Тогда при всех $t \geqslant 0$ имеем $k(\exp(tA)) = 0$. Однако, существуют марковские операторы с размахом 1, для которых при всех $t > 0$ и при всех $g \in L \setminus 0$ выполнено $k(\exp(tA), g) > 0$.*

Таким образом, можно надеяться лишь на строгое уменьшение расстояний между векторами, а так называемая «спектральная щель» в изучаемых системах, вообще говоря, отсутствует (по меньшей мере в той «естественной» системе координат, в которой они заданы).

Будем говорить, что семейство $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в множестве $U \subset X$, если для любого $x \in U$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое α и $\tilde{x} \in F_\alpha$, что $\rho(\tilde{x}, x) < \varepsilon$. Автору не удалось найти никаких ссылок на следующую простую теорему, которая полезна в контексте исследуемых далее задач.

Теорема 7. *Пусть отображение f строго уменьшает расстояния, т.е. для любых x, $y \in X$ выполнено $\rho(fx, fy) < \rho(x,y)$. Предположим, что существует семейство $\{F_\alpha\}$ компактных подмножеств X, удовлетворяющее условиям*

а) $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в X,

б) $fF_\alpha \subset F_\alpha$ для любого $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$.

Тогда существует единственная неподвижная точка $x^* \in X$, удовлетворяющая уравнению $fx^* = x^*$, и для любого $x \in X$ выполнено $f^n x \to x^*$.

Иногда неподвижная точка известна и удобно пользоваться следующим признаком сходимости.

Теорема 8. *Предположим, что X — банахово пространство, а x^* — неподвижная точка отображения f. Пусть отображение f строго уменьшает расстояния, т.е. для любых x, $y \in X$ выполнено $\rho(fx, fy) < \rho(x, y)$. Также предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$ для множества $\bar{U}_\varepsilon(x^*) = \{x \in X \mid \|x - x^*\| \leqslant \varepsilon\}$ существует семейство $\{F_\alpha\}$ компактных подмножеств $\bar{U}_\varepsilon(x^*)$, удовлетворяющее условиям*

а) семейство $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в $\bar{U}_\varepsilon(x^*)$,

б) $fF_\alpha \subset F_\alpha$ при всех $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$.

Тогда неподвижная точка x^* единственна и для любого $x \in X$ при $n \to \infty$ выполнено $\rho(f^n x, x^*) \to 0$.

В счётномерном пространстве, вообще говоря, вопрос о существовании решений системы дифференциальных уравнений надо изучать специально. Пусть $x(t,\ g)$ — единственное решение системы уравнений

$$\dot{x} = f(x), \ \ x \in l_1, \ \ f : l_1 \to l_1 \tag{$**$}$$

с начальным условием $x(t_0,\ g) = g \in l_1$. Более того, пусть $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо зависит от начального условия, а производная $\Phi(t, g) = \partial x(t, g)/\partial g$ решения по начальному условию непрерывна по g и удовлетворяет *системе уравнений в вариациях*:

$$\dot{x} = f(x), \ \ \dot{\Phi} = J(x)\Phi, \ \ x(t_0, g) = g \in l_1, \ \ \Phi(t_0, g) = I : l_1 \to l_1, \tag{$***$}$$

где $J(x) = (\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1}^{\infty}$ — матрица оператора Якоби, а I — тождественный оператор.

Теорема 9. *Пусть функция $f(x)$ и ее производная $J(x)$ при $x \in U_\eta(g)$ непрерывны и удовлетворяют условиям $\|f(x)\| < M_0$, $\|J(x)\| < M_1$. Тогда существует такое число $\delta > 0$, $\delta = \min(\eta/M_0, 1/M_1)$, что для всякого t в интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ дифференциальное уравнение $(**)$ имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее условиям $x(t_0, g) = g$ и $x(t, g) \in U_\eta(g)$. При этом $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо по начальному условию и его производная удовлетворяет уравнению $(***)$.*

Обозначим $L = \{g \in l_1 \mid g_0 + \ldots = 0\}$. Во всех последующих результатах предполагается, что существует такое выпуклое множество $X \subset c + L$, $c \in l_1$, что $x(t, g) \in X$ при всех $g \in X$ при любом $t \geqslant 0$ и $\exp(tJ(g))$ — марковское отображение.

Теорема 10. *Для любых g^0, $g^1 \in X$ при всех $t \geqslant 0$: $\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leqslant \|g^1 - g^0\|$*

Чтобы доказать сходимость любого решения к стационарному, необходимо проверять дополнительные условия.

Теперь предположим, что существует линейное отображение $B \geqslant 0$, удовлетворяющее при некотором $\zeta \geqslant 0$ следующим условиям

(a) при всех $x \in X$ верно неравенство $J(x) + \zeta I \geqslant B$, где I является единичной матрицей;

(б) B — пропорционально марковскому отображению и для $t > 0$ коэффициент эргодичности $\exp(tB)$ по любому фиксированному направлению $g \in L \setminus \{0\}$ строго больше нуля: $k(\exp(tB), g) > 0$.

Теорема 11. *Если X выпукло, $X \subset c + L$, где $c \in l_1$, и выполнены условия* (а) *и* (б), *то для любого $\tau > 0$ и для любых g^0, $g^1 \in X$, $g^1 - g^0 \neq 0$: $\|x(\tau, g^1) - x(\tau, g^0)\| < \|g^1 - g^0\|$.*

Теорема 12. *Пусть выполнены условия теоремы* 11 *и существует семейство компактных множеств $\{F_\alpha\}$, удовлетворяющее условиям*

(а) семейство множеств $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в X,

(б) для любого $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$ выполнено $x(t, F_\alpha) \subset F_\alpha$ при любом $t \geqslant 0$.

Тогда существует единственная неподвижная точка g^* и для любого $g \in X$ выполнено $x(t, g) \to g^*$ при $t \to \infty$.

В разделах 2 и 3 приводятся примеры явного построения семейства F_α. Иногда можно выбрать $F_\alpha = F_g = \overline{\{x(t, g) \mid t \geqslant 0\}}$ и доказать, что для всякого g траектория $\{x(t, g) \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактна.

Следующая теорема даёт достаточный признак предкомпактности траектории.

Теорема 13. *Если*

(i) *существует такая однородная эргодичная положительно возвратная цепь Маркова со счётным числом состояний $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и непрерывным временем, с матрицей интенсивностей переходов $Q = (q_{ij})$, что $\sum\limits_{l \geqslant k} J_{lj}(x(t, g)) \leqslant \sum\limits_{l \geqslant k} q_{ml}$ при любых $j \leqslant m$, $k \in \{0, \ldots, j\} \cup \{m+1, \ldots\}$, $t \geqslant 0$, $g \in X$;*

(ii) *существует неподвижная точка $g^* = x(t, g^*) \in X$,*

то для любого $g \in X$ траектория решения $\{x(t, g) \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактна.

Связь требования на неотрицательность недиагональных элементов матрицы $J(g)$ с поведением $x(t, g)$ раскрывается в следующей теореме.

Теорема 14. *Пусть $x(t, g) \in l_1$ при любом $t \geqslant 0$ и $g \in l_1$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *для всех g недиагональные элементы $J(g)$ неотрицательны;*

(ii) *для всех g для любого $h \in l_1$, $h \geqslant 0$ $x(t, g + h) \geqslant x(t, g)$.*

Эту теорему можно сформулировать для решений $x(t, \cdot)$, остающихся в некотором «толстом» множестве $X \subset l_1$. Однако технические условия, которые в этом случае надо наложить на X, затемнили бы существо дела, в то время как максимальной общности так и не удалось бы достичь. Доказательства всех описанных теорем проведены в разделе 1.

В разделе 2 получено новое доказательство сходимости системы, которую изучали Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин и Ф.И. Карпелевич[9]. Они показали покоординатную сходимость, в то время как применение теорем 10–14 позволяет доказать сходимость по норме в пространстве l_1.

В разделе 3 изучается система дифференциальных уравнений для *замкнутой* системы с законом сохранения типа суммы компонент.

Пусть $r > 0$, $\lambda > 0$. Рассмотрим *уравнения среднего поля* для симметричной транспортной сети, которая получается при $m \to \infty$ из системы, рассмотренной в [2] и разделе 2 первой главы:

$$\begin{aligned}
&\dot V = \lambda u_1 - V,\\
&\dot u_1 = \lambda(u_2 - u_1) + V(1 - u_1),\\
&\dot u_2 = \lambda(u_3 - u_2) + V(u_1 - u_2),\\
&\dot u_3 = \lambda(u_4 - u_3) + V(u_2 - u_3),\\
&\dots\\
&\dot u_k = \lambda(u_{k+1} - u_k) - V(u_{k-1} - u_k).\\
&\dots
\end{aligned}$$

Обозначим через $u(t,\ g)$ единственное решение последней системы с начальным условием $u(0,\ g) = g \in l_1$. Уравнение сокращённо будем обозначать $\dot u = f(u)$. Для обоснования существования и единственности локального решения $u(t,\ g)$ воспользуемся теоремой 9. Действительно, в ограниченном шаре $\|u\| \leqslant C$, $\|f(u)\| \leqslant 3(\lambda + C)(1 + \|u\|) \leqslant 3(\lambda + C)(1 + C)$. Матрица Якоби имеет следующий вид:

$$J(u) = \begin{pmatrix}
-1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots\\
1 - u_1 & -\beta & \lambda & 0 & 0 & \dots\\
u_1 - u_2 & V & -\beta & \lambda & 0 & \dots\\
u_2 - u_3 & 0 & V & -\beta & \lambda & \dots\\
u_3 - u_4 & 0 & 0 & V & -\beta & \dots\\
u_4 - u_5 & 0 & 0 & 0 & V & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix},$$

где $\beta = \lambda + V$. Из вида $J(u)$ следует, что $\|J(u)\| \leqslant \max\big(2(\lambda + \|u\|), 2(1 + \|u\|)\big)$ при $\|u\| < C$. Условия теоремы 9 выполнены, и для $g \in l_1$ в некоторой окрестности $t_0 = 0$ существует решение $u(t, g)$.

Лемма 15. *Множество*

$$U = \{(V, u_1, u_2, \dots) \mid 1 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant 0,\ V \geqslant 0,\ V + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = r\}$$

является инвариантным множеством системы $\dot u = f(u)$ *при* $r > 0$.

При $\lambda > 0$ легко найти стационарное решение $u(t, g^*) = g^*$ при $t \geqslant 0$ и доказать его единственность в U. Действительно, приравнивая правые части $\dot u = f(u)$ к нулю, получаем $f(g^*) = 0$, откуда $u_1^* = V/\lambda = \rho$, $u_k = \rho^k$. Принимая во внимание, что $V + u_1 + \dots = r$, получаем уравнение на ρ:

$$\frac{\rho}{1 - \rho} = r - \lambda\rho,$$

которое имеет единственное решение ρ^* при $\rho > 0$. Таким образом, $g_0^* = \lambda\rho^*$, $g_k^* = (\rho^*)^k$.

Оказывается, можно построить такое семейство компактных инвариантных подмножеств, плотное в некотором шаре, что будут выполнены условия теоремы 8, откуда вытекает следующее утверждение.

Теорема 16. *При* $\lambda > 0$ *для любого* $g \in U$*:* $\|u(t,g) - g^*\| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Раздел 4 посвящён краткому перечислению других счётномерных систем дифференциальных уравнений, к которым применим описанный метод.

В разделе 5 изучается неприводимая апериодическая цепь Маркова со счётным пространством состояний, непрерывным временем и ограниченными в совокупности интенсивностями переходов. В этом разделе устанавливается достаточный признак эргодичности цепи Маркова в терминах существования инвариантных подмножеств у описывающей её системы дифференциальных уравнений. Отметим, что задача об эргодичности таких цепей Маркова в терминах существования инвариантного распределения решена полностью, т.е. неприводимая апериодическая марковская цепь с ограниченными интенсивностями переходов эргодична тогда и только тогда, когда имеется единственное инвариантное распределение.

Очень часто найти само стационарное распределение в явном виде не представляется возможным и интересен сам вопрос об эргодичности цепи Маркова. Существует множество подходов для доказательства эргодичности цепей Маркова, среди которых следует выделить метод обновлений С. Асмусена[14], метод склеивания (coupling'а), предложенный Т. Линдвалом[18] и метод пробных функций (метод Фостера-Ляпунова), изложенный с современной точки зрения в книге В.А. Малышева, М.В. Меньшикова и Г. Файоля[19]. Эти подходы не апеллируют (по меньшей мере, явно) к дифференциальным уравнениям, которыми описываются цепи Маркова. В разделе 5 устанавливается некоторая новая теорема о сходимости в терминах прямой системы дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающей цепь Маркова.

Без ограничения общности будем считать, что пространство состояний эргодичной апериодической цепи Маркова состоит из целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Вероятности нахождения в момент t в состоянии p_i удовлетворяют прямой системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\dot{x} = Q^{\mathrm{T}} x, \ x \in l_1 \ x = (p_0, p_1, \ldots)^{\mathrm{T}},$$

где $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i \geqslant 0} p_i = 1$, а матрица Q задаёт интенсивности переходов.

Далее предполагается, что матрица Q^{T} задаёт ограниченный оператор в l_1, что эквивалентно условию $q = \sup_{i \geqslant 0}(-q_{ii}) < \infty$. Обозначим через $x(t,p)$ решение системы

[18] *T. Lindvall*. Lectures on the coupling method. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. A Wiley-Interscience Publication.

[19] *G. Fayolle, V. A. Malyshev, M. V. Men'shikov*. Topics in the constructive theory of countable Markov chains. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

дифференциальных уравнений $\dot{x} = Q^{\mathrm{T}}x$. Через X обозначим множество

$$X = \{p \in l_1 \mid p_i \geqslant 0, \sum_{i \geqslant 0} p_i = 1\}.$$

Лемма 17. *Пусть существует такое семейство компактных инвариантных подмножеств $\{F_\alpha\}$, что для всякого α выполнено $x(t, F_\alpha) \subset F_\alpha$ при всех $t \geqslant 0$. Кроме того, предположим, что при некотором $\zeta \geqslant q$ для всякого $g \in L \setminus 0$ выполнено $k(\exp(Q + \zeta I), g) > 0$. Тогда существует единственная неподвижная точка $p^* \in X$, причём для всякого $p \in X$ имеется сходимость $x(t, p) \to p^*$ при $t \to \infty$.*

Таким образом, если есть хотя бы одно компактное инвариантное множество, то существует единственное инвариантное распределение p^*. Некоторое обратное утверждение изложено в следующей лемме.

Лемма 18. *Предположим, что существует инвариантное распределение p^*. Тогда всякая траектория предкомпактна.*

В разделе 6 показано, каким образом можно применять лемму 17 к изучению эргодичности некоторой специальной транспортной сети, состоящей всего из двух узлов, но имеющей бесконечную очередь пассажиров.

Глава 3. Третья глава посвящена изучению транспортной сети с изначально счётным числом узлов. Оказывается, такая сеть является обобщением хорошо известного процесса с нулевой областью зависимости, введённого Ф. Спицером[20].

Здесь используется терминология, принятая для процессов с нулевой областью зависимости: под частицами подразумеваются приборы, а под ячейками — узлы. Так что, имеется конечное или счётное число частиц, которые находятся в счётном множестве узлов J. Переходы частиц, находящихся в узле $i \in J$, происходят после истечения случайного показательно распределённого времени τ_i с параметром γ_i. Если по прошествии этого времени узел i непуст, то одна и только одна из частиц, находящихся в ячейке, мгновенно перемещается в некоторый узел j, который выбирается с вероятностью p_{ij}. Все имеющиеся интервалы времени и переходы считаются независимыми в совокупности. Вероятности перехода из i в j составляют матрицу $P = (p_{ij})_{i,j \in J}$, $\forall i \in J \sum_{j \in J} p_{ij} = 1$. Этот процесс можно описать с помощью бесконечного вектора $\eta(t) = \{\eta_i(t)\}_{i \in J}$, $t \geq 0$, где $\eta_i(t)$ — это число частиц в узле i в момент t. Существование феллеровского процесса $\eta(t)$ выводится из существования описывающей его марковской полугруппы $S(t)$ $((S(t)f)(\eta) = \mathbf{E}(f(\eta(t)) \mid \eta(0) = \eta))$ с помощью известных теорем теории марковских процессов[6]. Построение же марковской полугруппы $S(t)$ можно провести с помощью техники, описанной в книге Т.М. Лиггетта[21].

[20] *F. Spitzer*. Interaction of Markov processes. // Advances in Math., vol. 5, pp.246–290 (1970), 1970.

[21] *Т.М. Лиггетт*. Марковские процессы с локальным взаимодействием. Изд-во «Мир», Москва, 1989.

Пусть $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\overline{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Тогда в пространстве состояний системы $W = \overline{\mathbb{Z}}_+^J$ можно ввести специальную метрику, в которой само пространство будет компактным. Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра, порождаемая цилиндрическими множествами, а $C(W)$ — банахово пространство всех действительно-значных функций на W с равномерной нормой.

Для всякой $f \in C(W)$ $\forall\, i \in J$ определим «меру зависимости от координаты i» по правилу

$$\Delta_f(i) = \sup\left\{\mid f(\eta) - f(\zeta) \mid : \eta, \zeta \in W,\, \eta_j = \zeta_j \;\forall\, j \neq i\right\}.$$

Введём плотное в $C(W)$ множество $D(W) = \left\{ f \in C(W) : ||| \, f \, ||| \overset{def}{=} \sum\limits_{i \in J} \Delta_f(i) < \infty \right\}$. Определим следующий оператор на $D(W)$:

$$A\, f(\eta) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \left[I\{\eta_i > 0\} \gamma_i p_{ij} \left(f(\ldots \eta_i - 1 \ldots \eta_j + 1 \ldots) - f(\eta) \right) \right].$$

Теорема 19. *Если*

$$\sup_{i \in J} \gamma_i < \infty, \quad \sup_{i \in J} \sum_{j \in J} \gamma_j p_{ji} < \infty, \qquad (\times)$$

то

(1) *Замыкание $\overline{A}$ оператора A является инфинитезимальным оператором марковской полугруппы $S(t)$ и подпространство $D(W)$ является существенным подпространством для $\overline{A}$.*

(2) *Существует единственный феллеровский процесс $\eta(t) : (\Omega, \Im, \mathbf{P}) \to (W, \mathcal{B})$ с заданным инфинитезимальным оператором A; $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство.*

Следствие 20. *Если выполнено одно из утверждений:*

- $\sup\limits_{i \in J} \gamma_i < \infty$, $\sup\limits_{i \in J} \sum\limits_{j \in J} p_{ji} < \infty$
- $\sum\limits_{i \in J} \gamma_i < \infty$,

утверждения (1)–(2) теоремы 19 *верны.*

Далее всюду предполагается, что условие $(\times)$ выполнено.

Предположим, что однородная марковская цепь с пространством состояний J и переходной матрицей P является апериодичной и неприводимой. Введём

Предположение А: Существует положительная инвариантная мера $\pi = \left(\pi_i\right)_{i \in J}$ для P (необязательно конечная).

Предположение Б: Существует единственная инвариантная вероятностная мера $\pi = \left(\pi_i\right)_{i \in J}$ для P (которая называется *стационарной*).

Предположение В: Счётная цепь Маркова с переходной матрицей P является транзиентной.

Обозначим

$$a \stackrel{def}{=} \sup_{i \in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty. \qquad (\times\times)$$

Пусть $\rho_{\max} = 1/a$. Для любого $\rho \in [0;\rho_{\max}]$ и $\rho = \infty$ введём меру-произведение $L_\rho(\cdot)$ на $(W, \mathcal{B})$ с координатными множителями $l^i_\rho(\cdot)$, $i \in J$, определяемыми по-разному в следующих двух случаях:

если $\rho \in [0;\rho_{\max}]$ и $\rho(\pi_i/\gamma_i) < 1$, то

$$l^i_\rho(k) = \begin{cases} (1 - \rho(\pi_i/\gamma_i))\,(\rho(\pi_i/\gamma_i))^k\,,\ k \in \mathbb{Z}_+, \\ 0,\ k = \infty \end{cases}$$

если же $\rho = \rho_{\max}$, $\rho(\pi_i/\gamma_i) = 1$ либо просто $\rho = \infty$, то

$$l^i_\rho(k) = \begin{cases} 0,\ k \in \mathbb{Z}_+, \\ 1,\ k = \infty. \end{cases}$$

Введём $\mathbf{L} = \{L_\rho(\cdot):\ \rho \in [0;\rho_{\max}],\ \rho = \infty\}$. Обозначим через $\tilde{\mathbf{L}}$ выпуклую оболочку $\mathbf{L}$:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \bigcap_{K\text{–замкнутое выпуклое множество},\ K \supseteq \mathbf{L}} K.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — класс всех инвариантных мер марковского процесса $\{\eta(t)\}_{t\geq 0}$.

Теорема 21. *Предположим, что выполнены предположение A и условие $(\times\times)$. Тогда замкнутая выпуклая оболочка $\tilde{\mathbf{L}}$ множества мер*

$$\{L_\rho(\cdot):\ \rho \in [0;\rho_{\max}],\ \rho = \infty\}$$

включена в класс $\mathcal{M}$ всех инвариантных мер марковского процесса $\{\eta(t)\}_{t\geq 0}$.

Пусть

$$\sum_{i \in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty. \qquad (\times\times\times)$$

Утверждение 22. *Предположим, что выполнены предположение A и условие $(\times\times\times)$. Тогда $\forall\ \rho \in [0;\rho_{\max}]$*

$$L_\rho\left(\eta:\ \sum_{i \in J} \eta_i < \infty\right) = 1.$$

Теорема 23. *Пусть выполнены предположение A и условие $(\times\times\times)$. Предположим, что для узла $j_0 \in J$ выполнено условие $\pi_{j_0}/\gamma_{j_0} = \max\limits_{i \in J} \pi_i/\gamma_i$. Тогда $\forall\ k \in \mathbb{Z}_+$ $\forall \eta^0 : \sum\limits_{i \in J} \eta^0_i = \infty$*

$$\lim_{t \to \infty} P\left\{\eta_{j_0}(t) > k \mid \eta(0) = \eta^0\right\} = 1.$$

Теорема 24. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(1) *$\gamma < \infty$ и предположение B;*

(2) *$\gamma < \infty$ и $\forall j \in J$ $\sum\limits_{i \in J} p_{ij} \leqslant 1$;*

(3) $\forall j \in J \sum_{i\in J} p_{ij} \leqslant 1$ *и существует такая неубывающая последовательность конечных множеств* $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, $J_1 \subset J_2 \subset \ldots$, $\bigcup_n J_n = J$, *что* $\sup_{j\in J\setminus J_n} \gamma_j \longrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$, *а матрицы* $P^{(n)} = (p_{ij})_{i,j\in J_n}$ *неприводимы;*

(4) *Пусть* $\forall j \in J \sum_{i\in J} p_{ij} \leqslant 1$. *Введем обрывающуюся цепь Маркова* $Y = \{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ *с пространством состояний* J *и переходной матрицей* $P^T = (p_{ji})_{i,j\in J}$. *Обозначим через* $\bar{P}_j(J)$ *вероятность того, что* Y *оборвется при выходе из начального состояния* $Y_0 = j$. *Предположим, что* $\bar{P}_j(J) = 1$ *для всех* $j \in J$ *и* $\sup_{j\in J} \gamma_j < \infty$.

Тогда для любого $\eta(0) \in \mathbb{Z}_+^J$ *процесс* $\eta(t) \to 0$ *слабо при* $t \to \infty$.

Наконец, в разделе 2 предложен подход к изучению поведения процесса с нулевой областью зависимости с использованием методов, разработанных во второй главе.

Благодарности. Автор очень рад выразить теплую признательность своему научному руководителю Ларисе Григорьевне Афанасьевой.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Afanassieva L.G., Khmelev D.V.* Large transportation networks with finite-dimensional state space. Asymptotic approach. In: Proc. of 7th Vilnus Conference on Math. Stat., 1998.

В этой работе постановка задачи и возможные подходы к решению предложены Л.Г.Афанасьевой, а решение осуществлено Д.В. Хмелёвым.

[2] *Афанасьева Л.Г., Хмелёв Д.В.* Large transportation networks with finite-dimensional state space. Теория вероятностей и её приложения, 1999, том 44, вып. 1, с.157–158.

В этой работе постановка задачи и возможные подходы к решению предложены Л.Г.Афанасьевой, а решение осуществлено Д.В. Хмелёвым.

[3] *Khmelev D., Spodarev E.* Stability of infinite closed Jackson networks. In: XX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Lublin – Naleczow, 5-11 September, 1999, Abstracts, p.85.

В этой работе инвариантные меры и условия неэргодичности системы найдены Д.В.Хмелёвым, а существование марковского процесса, описывающего бесконечную замкнутую сеть Джексона, и построение функционала, являющегося супермартингалом принадлежат Е.Ю. Сподареву.

[4] *Khmelev D.V., Oseledets V.I.* Mean-field approximation for stochastic transportation network and stability of dynamical system. Technical Report 445, University of Bremen, June 1999. Preprint.

В этой работе норма, в которой фазовый поток исследуемой системы дифференциальных уравнений является сжатием, угадана Д.В.Хмелёвым, а строгое обоснование этого факта принадлежит В.И. Оселедцу. Теоремы о сходимости стохастической системы к детерминированной и о теоремы о сходимости инвариантных мер получены Д.В. Хмелёвым.

[5] *Оселедец В.И., Хмелёв Д.В.* Глобальная устойчивость бесконечных систем нелинейных дифференциальных уравнений и неоднородные счётные цепи Маркова. Пробл. передачи информации, 1999, том 36, вып.1, с.60–76.

В этой работе доказательство строгого неравномерного сжатия принадлежит В.И. Оселедцу, а доказательство сходимости и построение семейства компактных инвариантных множеств принадлежит Д.В. Хмелёву.

[6] *Khmelev D.V., Spodarev E.* Infinite closed Jackson networks. Technical Report Math/Inf/00/07, Friedrich-Schiller-Universität Jena, April 2000.

В этой работе теоремы о существовании изучаемых процессов получены Е.Ю. Сподаревым, а инвариантные меры и условия неэргодичности получены Д.В. Хмелёвым.

[7] *Оселедец В.И., Хмелёв Д.В.* Стохастические транспортные сети и устойчивость динамических систем. Теория вероятностей и её приложения, 2001, том 46, вып.1, с.147–154.

В этой работе норма, в которой фазовый поток исследуемой системы дифференциальных уравнений является сжатием, угадана Д.В.Хмелёвым, а строгое обоснование этого факта принадлежит В.И. Оселедцу. Теоремы о сходимости стохастической системы к детерминированной и о теоремы о сходимости инвариантных мер получены Д.В. Хмелёвым.

[8] *Хмелёв Д.В.* Предельные теоремы для несимметричных транспортных сетей. *Фунд. и прикл. математика*, 2001, том 9, вып.4, с.1401–1407.